

Николай Иванович
ЛОБАЧЕВСКИЙ
1/XII 1792—24/II 1856


К СТОЛЕТИЮ
СО ДНЯ СМЕРТИ
ЛОБАЧЕВСКОГО

КЛАССИКИ ЕСТЕСТВОЗНАНИЯ

МАТЕМАТИКА

МЕХАНИКА

ФИЗИКА

АСТРОНОМИЯ

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
ТЕХНИКО-ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
Москва · 1956

Н. И. ЛОБАЧЕВСКИЙ



ТРИ СОЧИНЕНИЯ ПО ГЕОМЕТРИИ

ГЕОМЕТРИЯ

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ИССЛЕДОВАНИЯ ПО ТЕОРИИ ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ ЛИНИЙ

ПАНГЕОМЕТРИЯ



Вступительная статья
А. П. НОРДЕНА

Примечания
В. Ф. КАГАНА



ГОСУДАРСТВЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
ТЕХНИКО-ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
Москва · 1956

11-5-4

Подготовлено к изданию
И. Н. БРОНШТЕЙНОМ
под общей редакцией
А. П. НОРДЕНА

ПРЕДИСЛОВИЕ

Эта книга, входящая в серию «Классики естествознания», выпускается к 100-летию со дня смерти Лобачевского. Ее цель — дать возможность широким кругам читателей ознакомиться с сочинениями великого русского математика в подлиннике.

Три сочинения Лобачевского — «Геометрия», «Геометрические исследования по теории параллельных линий» и «Пангеометрия» — это три этапа его творческой жизни, и в то же время — наиболее доступные из его работ [1]).

«Геометрия» является своего рода введением к дальнейшим геометрическим работам Лобачевского. Составленное накануне его великого открытия, это сочинение показывает, как подходил молодой Лобачевский к неевклидовой геометрии. «Геометрические исследования» и сейчас остаются непревзойденным изложением начальных сведений по неевклидовой геометрии. Наконец, «Пангеометрия» — последний подвиг, научное завещание Лобачевского, продиктованное им за год до смерти. В нем Лобачевский хотел дать такое же доступное изложение и других вопросов неевклидовой геометрии, и, несмотря на огромные трудности, это ему в большой степени удалось.

В этих трех небольших сочинениях полностью не отражена, конечно, вся многогранная научная деятельность Лобачевского даже в области геометрии. Здесь, например, только мимоходом говорится об аналитическом обосновании неевклидовой геометрии, сделанном в сочинении «Воображаемая геометрия», о той системе основных геометрических понятий, которыми начинаются «Новые начала геометрии с полной теорией параллельных» [2]). Но всё же прочитавший эту книгу

---

[1]) Очень доступно написан также фундаментальный труд Лобачевского «Новые начала геометрии с полной теорией параллельных». Но он занимает более 300 страниц формата этой книги (напечатан на стр. 147—454 II тома Полного собрания сочинений Лобачевского), и начинать с него ознакомление с геометрией Лобачевского нецелесообразно.

[2]) «Воображаемая геометрия» и «Новые начала геометрии» будут напечатаны в сборнике: Н. И. Лобачевский, «Избранные сочинения по геометрии», выпускаемом к 100-летию со дня его смерти Академией наук СССР. В сборник включены также «Геометрические исследования» и отрывок из сочинения «О началах геометрии».

получит почти полное представление о геометрическом творчестве Лобачевского.

Первые сведения о неевклидовой геометрии всегда требуют напряжения — настолько необычны ее факты, так противоречат они привычным геометрическим представлениям. Неподготовленному читателю рекомендуется до этой книги познакомиться с историей учения о параллельных линиях, с историей открытия неевклидовой геометрии. По этим вопросам имеется большая литература [1]).

Большую помощь читателю окажут обстоятельные примечания к сочинениям Лобачевского, составленные выдающимся советским геометром, крупнейшим специалистом по геометрии Лобачевского Вениамином Федоровичем Каганом (1869—1953). Примечания были написаны для Полного собрания сочинений Лобачевского [2]). Они воспроизведены в этой книге с некоторой переработкой. В собрании сочинений были примечания трех категорий: одни (общего характера) составляли обзорную вводную статью перед каждым сочинением Лобачевского, другие (небольшие разъяснения) помещались в виде постраничных сносок, третьи (большие примечания и дополнительные сведения) — после текста сочинения. Эта система очень облегчала усвоение работ Лобачевского, но в то же время она иногда рассеивала внимание читателя, мешала ему следить за изложением самого автора. Здесь все примечания собраны после текста; это потребовало в некоторых местах редакционных изменений. Добавлено также несколько новых примечаний [3]).

Примечания в этой книге — также трех типов. Одни относятся к сочинению Лобачевского в целом, другие — к каждой его главе, третьи — локальные (они снабжены номерами). С примечаниями первого и второго типов рекомендуется ознакомиться перед чтением соответствующего сочинения или главы, а с нумерованными — по мере надобности.

Текст Лобачевского перепечатан из Полного собрания сочинений. При этом сделаны следующие изменения.

Сочинения разделены на главы. Из помещенных в этой книге работ Лобачевский разделил на главы только «Геометрию», в других

---

[1]) Рекомендуем превосходную книгу: В. Ф. Каган, Лобачевский и его геометрия (Общедоступные очерки), М., 1955.

[2]) Н. И. Лобачевский, Полное собрание сочинений. Главный редактор В. Ф. Каган. Вышли в свет тома I—V (М.—Л., 1946—1951). Последний VI том готовится к печати.

[3]) Главным образом к сочинениям «Геометрия» (в связи с опубликованием в 1948 г. «Обозрений преподавания чистой математики» Лобачевского) и «Пангеометрия» (ссылки на примечания к другим сочинениям Лобачевского заменены развернутыми объяснениями).

же двух сочинениях текст идет подряд; поэтому иногда трудно установить, где кончается один круг вопросов и начинается другой. Если еще «Геометрические исследования» состоят из 37 нумерованных «предложений», то «Пангеометрия» написана Лобачевским без всякой рубрикации [1]). Выпуская «Геометрические исследования» отдельной книгой [2]), В. Ф. Каган разделил это сочинение на 11 глав и дал каждой название. Это сохранено и здесь, и то же самое сделано по отношению к «Пангеометрии» — она разделена на 14 глав со специальными названиями.

В самом тексте не соблюдается строго та идентичность с первоисточниками, которая имеется в Полном собрании сочинений Лобачевского. Необходимая в академическом издании, она иногда затрудняет читателя. Здесь исправлены без оговорок допущенные Лобачевским ошибки [3]), сняты во многих местах квадратные скобки, в которых стоят добавленные редактором отдельные связующие слова и обозначения, порою изменены абзацы, введены выделения для терминов и т. п. В некоторых случаях чертежи заменены новыми, более близкими к тексту.

Во вступительной статье А. П. Нордена «Геометрические идеи Лобачевского» изложены взгляды Лобачевского на основания геометрии и охарактеризовано значение его творчества. В приложении даны историко-библиографические сведения обо всех геометрических сочинениях Лобачевского (с кратким обзором работ, не вошедших в эту книгу); на них делаются ссылки во многих примечаниях.

Книгу подготовил к изданию И. Н. Бронштейн; им же составлены приложение и дополнительные примечания к сочинениям Лобачевского. Общая редакция книги проведена А. П. Норденом.

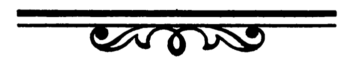
---

[1]) «Пангеометрию» Лобачевский, почти совершенно слепой, диктовал своим ученикам; она была напечатана даже без чертежей, которые совершенно необходимы для понимания содержания. В. Ф. Каган разделил сочинение на 28 параграфов («статей») и сделал все чертежи по тексту Лобачевского. Это воспроизведено и в настоящем издании.

[2]) Н. И. Лобачевский, Геометрические исследования по теории параллельных линий, Изд. АН СССР, М. — Л., 1945, 175 стр.

[3]) В связи с этим исключены некоторые примечания В. Ф. Кагана.

А. П. НОРДЕН



ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ИДЕИ ЛОБАЧЕВСКОГО

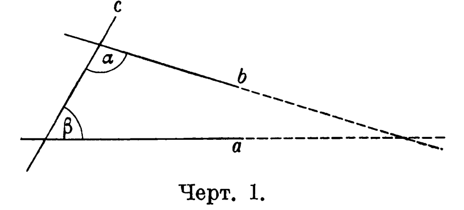
I.

Среди знаменитых задач древности о квадратуре круга, о трисекции угла, об удвоении куба, над решением которых наука билась более двух тысячелетий, особое место занимает проблема пятого постулата Евклида (*постулата о параллельных линиях*). Гениальное открытие Лобачевского, связанное с ее решением, произвело подлинную революцию в науке, на века определившую пути ее дальнейшего развития.

Проблема постулата о параллельных линиях возникла вскоре после появления «Начал» Евклида, жившего на рубеже IV и III столетий до н. э. Это замечательное сочинение подводило итог четырехвековому развитию эллинской геометрии, связанному с именами Фалеса, Пифагора, Гиппократа, Демокрита, Теэтета и Платона: геометрия приняла форму дедуктивной науки.

В начале своего изложения Евклид приводит наряду с определениями немногие *постулаты* и *аксиомы*, т. е. такие положения, которые принимаются без доказательств, но кладутся в основу доказательств многочисленных теорем, охватывающих в своей совокупности всё содержание геометрии.

Первые постулаты Евклида весьма просты и говорят о возможности проведения прямой через две точки и ее неограниченной продолжаемости, о возможности построения окружности и о равенстве прямых углов.



Черт. 1.

Гораздо более сложен пятый постулат Евклида, содержащий следующее утверждение: *две прямые, расположенные в одной плоскости и пересеченные третьей прямой, пересекаются между собою по ту сторону последней, по которую они образуют с нею внутренние углы, сумма которых меньше* 180° (см. черт. 1).

Это положение, представляющее основу важнейших разделов геометрии [1]) (теории параллельных линий, теории подобия, основ

[1]) Тем не менее следует отметить, что первые 28 теорем первой книги «Начал» Евклид доказывает без помощи пятого постулата. Совокупность таких положений, не зависящих от пятого постулата, в настоящее время принято называть *абсолютной геометрией*.

тригонометрии, теории измерения круга и его частей, теории площадей и объемов), привлекло особое внимание комментаторов и продолжателей Евклида. Такое внимание, помимо сознания исключительной важности постулата, объяснялось еще и другим обстоятельством. Точка зрения, которая господствовала среди геометров и философов, начиная с Платона и кончая Кантом, требовала, чтобы постулат или аксиома, т. е. истина, положенная в основу науки, обладала признаком очевидности. Но если были очевидны остальные постулаты и аксиомы Евклида, то этого нельзя было сказать о пятом постулате. Вследствие этого возникло устойчивое мнение, что он включен в число постулатов не потому, что его нельзя вывести из других, а потому, что Евклид не сумел найти его доказательства. Отсутствие этого доказательства стали считать основным недостатком системы Евклида, настоятельно требующим исправления.

Так возникла проблема пятого постулата, решить которую тщетно пытались в течение двух тысяч лет крупнейшие геометры Греции и Византии, стран Востока и Запада. Роковым образом оказывалось, что все предлагаемые доказательства либо содержали ошибку, либо были основаны на явном или неявном допущении новой аксиомы, равносильной положению Евклида [1]).

На рубеже XVIII и XIX столетий, когда число неудачных попыток решить проблему параллельных особенно увеличилось, геометров охватило чувство, близкое к отчаянию. Выражая чувства многих, венгерский математик Фаркаш Больаи писал своему сыну Яношу:

> «Молю тебя, не делай только и ты попыток одолеть теорию параллельных линий. Я изучил все пути до конца; я не встретил ни одной идеи, которую бы я не разрабатывал. Я прошел весь беспросветный мрак этой ночи, и всякий свет, всякую радость жизни я в ней погасил... Этот беспросветный мрак может потопить тысячи ньютоновских башен. Он никогда не рассеется и никогда несчастный род человеческий не будет владеть чем-либо совершенным даже в геометрии. Это большая и вечная рана в моей душе».

Но в то самое время, когда писались эти слова, проблема была уже близка к своему разрешению. С разных сторон и независимо друг от друга к ней подошли Гаусс, Швейкарт, Лобачевский и Янош Больаи. Однако это решение было не то, которое безрезультатно искали геометры всех стран и народов в течение двух тысячелетий:

---

[1]) Об истории пятого постулата Евклида и попытках доказать его см. В. Ф. Каган, Лобачевский и его геометрия, М., 1955 (Очерк «Учение о параллельных линиях до открытия неевклидовой геометрии», стр. 21).

оно заключалось в утверждении, что постулат *недоказуем*, и первым важнейшим подтверждением этой недоказуемости было создание геометрии, отличной от геометрии Евклида. Следует заметить, что только один Лобачевский последовательно и до конца своей жизни продолжал разрабатывать неевклидову геометрию и первый опубликовал ее в печати.

Гаусс приближался к этому решению уже в конце XVIII века, но прошло 25 лет, прежде чем он оставил надежду на возможность доказательства постулата Евклида. Однако до конца жизни Гаусс не опубликовал своих идей и даже запрещал своим ближайшим друзьям, которым он писал о них, распространять это известие. Да и в этих письмах Гаусс первый раз высказался определенно только после того, как Герлинг переслал ему в 1819 году заметку Швейкарта, содержащую предположение о возможности неевклидовой геометрии, которую последний назвал *астральной* [1]). Судя по тому же письму Герлинга, Швейкарт сам еще не был полностью уверен в своем открытии и, может быть, поэтому впоследствии ничего уже не писал и не публиковал по этому вопросу.

Лобачевский начал свои работы по теории параллельных линий с попыток доказательства постулата Евклида. Записки его лекций в марте 1817 года [2]) содержали такое доказательство, которое, несмотря на свое исключительное остроумие, неявно опирается на положение, равносильное постулату [3]). Этот недостаток был вскоре обнаружен самим Лобачевским, который писал в 1822 году, что проблема параллельных представляет «трудность до сих пор непобедимую» [4]).

Однако уже 23 (11) февраля 1826 года Лобачевский передает факультету свой доклад, содержащий развернутое изложение неевклидовой геометрии, которую он осторожно назвал *воображаемой*. Если принять во внимание, что ее разработка, включающая тригонометрию, должна была поглотить немало времени Лобачевского, который сверх того вел огромную педагогическую и административную

---

[1]) Общие причины, которыми определяется длительность сомнений Гаусса, его нежелание обнародовать свои результаты и дать публичные отзывы о работах Лобачевского и Больаи, коренятся, по нашему мнению, в его мировоззрении. См. об этом: А. П. Норден, Гаусс и Лобачевский, Историко-математические исследования, вып. IX, М., 1956.

[2]) О лекциях Лобачевского («Записки Темникова») см. на стр. 383 этой книги.

[3]) См. Б. Л. Лаптев, Теория параллельных линий в ранних работах Н. И. Лобачевского, Историко-математические исследования, вып. IV, М. — Л., 1951, стр. 201—229.

[4]) И. Н. Бронштейн, К истории «Обозрений преподавания чистой математики Н. И. Лобачевского», Историко-математические исследования, вып. III, М. — Л., 1950, стр. 171—194.

работу, и сопоставить это с некоторыми документальными данными[1], то можно придти к заключению, что Лобачевский открыл свою геометрию не позднее 1824 года. Впервые Лобачевский опубликовал свое открытие в 1829 году в статье «О началах геометрии».

Что касается Яноша Больаи, то его сочинение «Appendix», содержащее своеобразное изложение основ неевклидовой геометрии, было опубликовано в 1832 году, т. е. спустя три года после выхода в свет статьи Лобачевского.

II.

Перейдем к изложению взглядов Лобачевского на геометрию и проблему параллельных линий.

Лобачевский всегда требовал строгости в построении математических дисциплин и, в особенности, их оснований. В предисловии к своему учебнику «Алгебра» (1825 г.) он писал:

> «Для самой науки надобно было всегда желать, чтобы она стала на твердом основании, чтоб строгость и ясность сохранялись в самых ее началах»[2].

Этому требованию он старался удовлетворить и в алгебре и в анализе. Но с этой точки зрения особенно неудовлетворительным казалось ему то изложение оснований геометрии, которое он находил в литературе, начиная с Евклида и кончая современными ему учебниками.

Уже в «Обозрении преподавания на 1824—1825 год»[3] Лобачевский пишет:

> «Начала геометрии казались некоторым столь легки, что они предлагали проходить их прежде арифметики и алгебры. Однако ж если в математике строгость необходима, то начала геометрии представляют трудности...
>
> Если собственные чувства предохраняют от ложных заключений в продолжении геометрии, то всё остается желать избавить одну из частей математики от нарекания погрешать против обыкновенной своей строгости, быть темной и недостаточной в самых основаниях»[4].

---

1) См. предыдущую сноску.

2) Н. И. Лобачевский, Полн. собр. соч., т. IV, стр. 370.

3) Об «Обозрениях преподавания чистой математики» Лобачевского см. на стр. 385 этой книги.

4) См. «Материалы для биографии Н. И. Лобачевского», собрал и редактировал Л. Б. Модзалевский, М. — Л., 1948, стр. 177. В дальнейшем эта книга цитируется: Модзалевский.

В своем сочинении «О началах геометрии» он говорит:

> «В самом деле, кто не согласится, что никакая Математическая наука не должна бы начинаться с таких темных понятий, с каких, повторяя Евклида, начинаем мы Геометрию» [1].

Ту же мысль Лобачевский повторил и в сочинении «Пангеометрия», отмечая недостаточность определений, приводимых в началах геометрии [2].

Формулируя свои положительные требования, Лобачевский говорил в сочинении «О началах геометрии»:

> «Первые понятия, с которых начинается какая-нибудь наука, должны быть ясны и приведены к самому меньшему числу. Тогда только они могут служить прочным и достаточным основанием учения» [3].

Из этих, твердо установленных и сведенных к наименьшему числу понятий

> «... суждение производит уже всё прочее, выводя тотчас из первых его данных новые, так потом и далее расширяя пределы наших познаний во всех направлениях до бесконечности» [4].

Что касается са́мих оснований геометрии, то Лобачевский говорит, что они

> «... должны быть несомнительные для нас истины, первые наши понятия о природе вещей, которые будучи раз приобретены, сохраняются навсегда» [5].

Как же приобретаются эти понятия и что́ обеспечивает их несомненность? К решению этого вопроса Лобачевский подходил с материалистических позиций, считая опыт основой всякого познания, в том числе и математического. В своей речи о важнейших предметах воспитания он говорит:

> «Надобно согласиться и с тем, что математики открыли прямые средства к приобретению познаний. Еще не с давнего времени пользуемся мы сими средствами. Их указал нам знаменитый

---

1) Н. И. Лобачевский, Полн. собр. соч., т. I, стр. 185.

2) См. стр. 137 этой книги.

3) Н. И. Лобачевский, Полн. собр. соч., т. I, стр. 186.

4) Н. И. Лобачевский, «Новые начала геометрии с полной теорией параллельных», Полн. собр. соч., т. II, стр. 164.

5) Из «Обозрения преподавания чистой математики на 1824—1825 год», Модзалевский, стр. 177.

Бако́н[1]). Оставьте, говорил он, трудиться напрасно, стараясь извлечь из одного разума всю мудрость; спрашивайте природу, она хранит все истины и на вопросы ваши будет отвечать вам непременно и удовлетворительно»[2]).

В соответствии с этим общим тезисом Лобачевский рассматривает и основания математики:

«Первыми данными без сомнения будут всегда те понятия, которые мы приобретаем в природе посредством наших чувств»[3]).

«Такие понятия приобретаются чувствами; врожденным не должно верить»[4]).

Исходя из своих общих гносеологических принципов, Лобачевский подходит к выбору основных понятий геометрии. Они должны быть непосредственно заимствованы из опыта, а не «составлены». Руководствуясь этими соображениями, Лобачевский предлагает считать основным объектом геометрии *тело*, а основным отношением между телами их *прикосновение*. Все остальные понятия, как-то: поверхность, линия, точка, прямая, плоскость и т. д., должны быть определены через эти основные понятия:

«Мы познаем в природе одни только тела; следовательно понятия о линиях и поверхностях суть понятия произведенные, а не приобретенные, и по сему не должны быть принимаемы за основание математической науки[5]).

Эту точку зрения Лобачевский проводил всегда, начиная с неизданного курса лекций 1816—1817 гг., и развил ее особенно подробно в «Новых началах геометрии»[6]).

Систематическое изложение геометрии он начинает следующим образом:

«*Прикосновение* составляет отличительную принадлежность тел и дает им название *геометрических*, когда в них удерживаем это

---

1) Френсис Бэкон — философ-материалист (1561—1626).

2) Модзалевский, стр. 323.

3) Н. И. Лобачевский, «Новые начала геометрии с полной теорией параллельных», Полн. собр. соч., т. II, стр. 164.

4) Н. И. Лобачевский, «О началах геометрии», Полн. собр. соч., т. I, стр. 186.

5) Н. И. Лобачевский, «Обозрение преподавания чистой математики на 1822—1823 год», Модзалевский, стр. 204.

6) См. также его сочинение «Геометрия», стр. 33 этой книги.

свойство, не принимая в рассуждение все другие, существенные ли то будут, или случайные» [1].

Далее, Лобачевский намечает определение *сечения*, разделяющего два тела, находящихся в соприкосновении, и три *главных сечения*, разделяющих тело на восемь частей, подобно тому как координатные плоскости разделяют пространство на октанты. Рассматривая эти части, он предлагает различать соприкосновение *поверхностное*, *линейное* и *в точке*, которые, по его мнению, дают содержание понятиям поверхности, линии и точки.

Равенство тел и, в частности, равенство расстояний между двумя точками Лобачевский основывает, в сущности, на представлении о совмещении двух тел, хотя нигде не говорится явно о движении.

Понятие расстояния используется для определения *сферы*, *плоскости*, как геометрического места точек, равноудаленных от двух точек пространства, и *прямой*, как места точек плоскости, равноудаленных от двух ее точек. После этого Лобачевский предлагает доказательство ряда теорем, среди которых отметим следующие:

«Прямые сливаются как скоро проходят через две точки». «Прямая может быть продолжена до бесконечности, когда накладывается сама на себя частью, подвигаясь остальною вперед». «Всякую точку на плоскости можно принимать за начало кругов» [2].

Эти же предложения приводятся и среди пятнадцати начальных положений «Геометрических исследований», «коих доказательства не представляют затруднений» [3]. Они интересны тем, что совпадают по содержанию с первыми тремя постулатами Евклида [4]. Кроме этих трех предложений и постулата о параллельных линиях, Евклид приводит только постулат о равенстве прямых углов, который в учебниках, современных Лобачевскому, доказывался как теорема.

В связи с этим уместно поставить вопрос об отношении Лобачевского к аксиомам и постулатам вообще. Оба эти термина встречаются у Лобачевского очень редко; поэтому возникло мнение, что Лобачевский являлся принципиальным противником аксиоматического изложения геометрии и, следуя Даламберу, считал его признаком «химерической и схоластической строгости» [5]. Мы не можем согласиться с этой точкой зрения. Лобачевский неоднократно упоминает *общие начала*

---

1) Н. И. Лобачевский, «Новые начала геометрии с полной теорией параллельных», Полн. собр. соч., т. II, стр. 168.

2) Там же, стр. 189, 190, 192.

3) Стр. 96 этой книги.

4) Начала Евклида, кн. I, М. — Л., 1950, стр. 14—15.

5) В. Ф. Каган, Лобачевский, изд. 2-е, М. — Л., 1948, стр. 137—138.

геометрии, а этот термин в его время был синонимом термина «*аксиома*» [1]). Более того, обосновывая в сочинениях «Новые начала геометрии» теорию измерения, он говорит прямо:

> «Чтобы удовлетворить всем этим требованиям, нельзя здесь обойтись без особых вспомогательных положений, которые принимают уже за аксиомы» [2]).

Наконец, систематическое изложение геометрии в «Новых началах» содержит три положения о поступательных, обращательных и главных сечениях тела [3]), которые носят характер аксиом. Правда, они сопровождаются некоторыми пояснениями, но при своей высокой требовательности к строгости Лобачевский не мог считать эти пояснения за доказательства. Что же касается аксиом и постулатов Евклида, которые приводились как таковые и в наиболее популярном учебнике того времени — «Элементах» Лежандра, то их Лобачевский считал нужным доказывать в качестве теорем, как мы видели выше.

Нужно сказать, что всё это изложение начал абсолютной геометрии, которое намечается во всех сочинениях Лобачевского и приведено в развернутом виде в «Новых началах геометрии с полной теорией параллельных», представляется современному читателю наименее приемлемым из всего наследия великого геометра. Правда, подробный анализ этого изложения с точки зрения современных взглядов еще не проводился, однако независимо от результатов этого анализа мы не можем отнестись без уважения к смелой попытке Лобачевского преодолеть те трудности в основаниях геометрии, которые были осознаны и разрешены только через многие годы на основе изучения наиболее ценного из наследия Лобачевского и прежде всего — его гениальной теории параллелей.

В обозрении преподавания, написанном Лобачевским еще в 1822 году, мы находим следующие слова:

> «Другого рода трудность в Геометрии представляет параллелизм линий, трудность до сих пор непобедимую, но между тем заключающую в себе истины ощутительные, вне всякого сомнения и столь важные для целой науки, что никак не могут быть обойдены [4]).

---

1) «Эвклидовых Начал восемь книг», перевод Петрушевского, СПб, 1819

2) Н. И. Лобачевский, Полн. собр. соч., т. II, стр. 166.

3) Там же, стр. 170, 171, 172.

4) Модзалевский, стр. 205.

Чтобы обойти эти трудности в преподавании, Лобачевский предлагает:

> «... все сии истины привести к одной такой, которая могла бы легко убеждать в ее справедливости, присоединяя сюда некоторые пояснения, несмотря на недостаток строгости» [1]).

Понимая под «одной истиной» постулат Евклида или равносильное ему положение, Лобачевский и приводит его в своем сочинении «Геометрия», сопровождая в качестве пояснения рассуждениями Бертрана [2]). Однако такое решение вопроса его явно не удовлетворяет; он его считает недостаточно строгим.

Почему же мы не можем принять такое положение за аксиому? Потому, отвечает Лобачевский, что оно не вытекает из наших основных понятий о телах, которые одни мы только и наблюдаем в природе. Неудачу в попытках построения теории параллельных Лобачевский объясняет тем, «что в самих понятиях еще не заключается той истины, которую хотели доказывать» [3]). Вследствие этого постулат Евклида и всякое другое равносильное ему положение являются *произвольными*; в сочинении «Пангеометрия» Лобачевский говорит:

> «Недостаточность начальных понятий для доказательства приведенной теоремы [4]) принудила геометров допускать прямо или косвенно вспомогательные положения, которые как ни просты кажутся, тем не менее произвольны и следовательно допущены быть не могут» [5]).

Если постулат Евклида не может быть ни доказан, ни допущен, то как обосновать теорию параллельных линий, а вместе с ней и последующие важнейшие разделы геометрии? Для Лобачевского, признающего общий материалистический тезис об опытном происхождении всякого познания, этот вопрос решался однозначно. *Допущение Евклида должно быть проверено опытом и наблюдением.* Однако этот опыт уже не может быть тем простым и всеобщим опытом, который сводится к повседневному наблюдению над телами и их соприкосновением и является источником основных понятий геометрии. Сложной и абстрактной природе постулата о параллельных может соответствовать только сложный и глубоко продуманный эксперимент. Но всякий эксперимент требует теории, а тот, который имеется в виду в данном случае, —

---

[1]) Модзалевский, стр. 205.

[2]) Стр. 57 — 58 этой книги.

[3]) Н. И. Лобачевский, Новые начала геометрии, Полн. собр. соч., т. II, стр. 147.

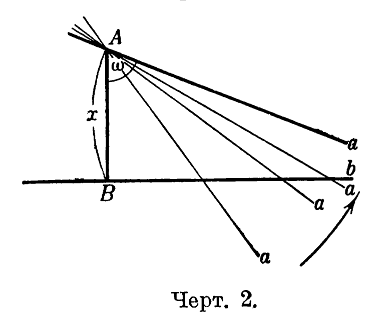
[4]) Лобачевский имеет в виду теорему о сумме углов треугольника, которая равносильна постулату Евклида.

[5]) Стр. 137 этой книги.

разработанной геометрической базы. Однако если за эту базу принять евклидову геометрию, то, даже в случае положительного исхода эксперимента, мы можем оказаться в плену порочного круга. Вот почему для проверки евклидовой геометрии необходимо разработать другую геометрию, которая основана не на постулате Евклида, а на его отрицании. Эту геометрию и разработал Лобачевский, назвав ее первоначально *воображаемой*.

III.

Предполагая, что читатель знаком с элементами геометрии Лобачевского[1]) или вернется к этим строкам после изучения его сочинения «Геометрические исследования по теории параллельных линий», мы только бегло коснемся ее основных положений.



Черт. 2.

Прямую a, пересекающую прямую b, будем вращать в каком-либо направлении вокруг ее точки A (черт. 2). При этом наступит момент, когда точка их пересечения «уйдет в бесконечность», т. е. перестанет существовать. В этот момент прямая a станет *параллельной* прямой b. Таким образом, прямая, проходящая через точку A и параллельная прямой b, расположенной в той же плоскости, является первой прямой, не пересекающей прямую b.

Опустив перпендикуляр AB из точки A на прямую b, измерим угол ω между этим перпендикуляром и параллелью $\dot{a}$. Этот угол называется *углом параллелизма*, соответствующим перпендикуляру $x = AB$, и обозначается $\Pi(x)$. Постулат Евклида равносилен предположению о том, что этот угол всегда прямой, а положение, отрицающее этот постулат, или *аксиома Лобачевского*, утверждает, что угол параллелизма, соответствующий любому значению перпендикуляра x, — острый. Отсюда вытекает, что различным значениям x соответствуют различные значения угла параллелизма и $\Pi(x)$ есть убывающая функция от x, значение которой изменяется от $\frac{\pi}{2}$ до 0, когда x изменяется от 0 до ∞.

Развивая геометрию своего пространства, Лобачевский заканчивает ее элементарную часть построением полной системы формул

[1]) Для первого ознакомления с геометрией Лобачевского можно рекомендовать очерк В. Ф. Кагана «Великий русский ученый Н. И. Лобачевский» (В. Ф. Каган, Лобачевский и его геометрия. Общедоступные очерки, М., 1955), и книжку П. А. Широкова «Краткий очерк основ геометрии Лобачевского», М., 1955. Систематическое изложение содержится в книге: А. П. Норден, Элементарное введение в геометрию Лобачевского, М. — Л., 1953.

тригонометрии. Они отличаются от формул обычной тригонометрии прежде всего тем, что стороны треугольника входят в них под знаком функции $\Pi(x)$. Так, например, в прямоугольном треугольнике гипотенуза c связана с катетом a и противолежащим ему углом A соотношением

$$\operatorname{tg} \Pi(c) = \operatorname{tg} \Pi(a) \sin A.$$

Лобачевский находит следующее выражение для функции $\Pi(x)$:

$$\omega = \Pi(x) = 2 \operatorname{arctg} e^{-\frac{x}{k}}, \qquad (1)$$

где k — постоянная, зависящая от выбора единицы масштаба. Отсюда вытекает, что во всех формулах тригонометрии стороны входят в отношениях к одной линии k. Лобачевский не дает ей особого названия и полагает ее обычно равной единице. В настоящее время эту линию называют *абсолютным отрезком* или *радиусом кривизны* пространства Лобачевского.

Непосредственно можно показать, что в геометрии Лобачевского сумма углов треугольника меньше двух прямых. Разность между двумя прямыми углами и этой суммой (*дефект* треугольника) пропорциональна его площади. Пользуясь тригонометрическими формулами, можно также выразить дефект через стороны и отдельные углы треугольника.

Предполагая отношения сторон к абсолютному отрезку очень малыми, Лобачевский показывает, что формулы евклидовой тригонометрии дают первые приближения к формулам тригонометрии его пространства. На этом основании он утверждает:

> «Воображаемая Геометрия обнимает употребительную Геометрию как частный случай, к которому переходим, принимая линии бесконечно малыми»[1].

IV.

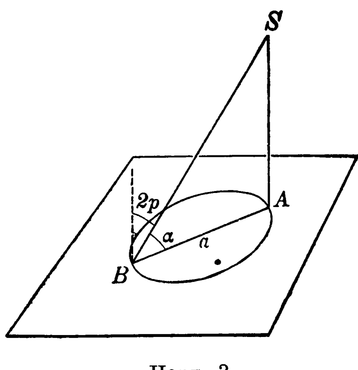
Вернемся теперь к тому эксперименту, с помощью которого Лобачевский предполагает произвести проверку постулата Евклида. Существенно то, что без предварительной разработки воображаемой геометрии самые условия этого эксперимента оставались бы совершенно неясными: нельзя было бы, например, ответить на вопрос, рассмотрение каких фигур, малых или больших, является предпочтительным. Но на основе развитой им теории Лобачевский дает однозначный ответ на этот вопрос. Если геометрия реального пространства отличается от геометрии Евклида, то это различие должно сказываться

[1] Н. И. Лобачевский, Воображаемая геометрия, Полн. собр. соч., т. III, стр. 26.

тем сильнее, чем больше наблюдаемая фигура. Отсюда с необходимостью следует, что мы должны наблюдать наибольшие из доступных нам фигур, т. е. такие фигуры, с которыми имеет дело астрономия.

Исходя из этого, Лобачевский предлагает в сочинении «О началах геометрии» следующую схему астрономических наблюдений.

Предположим, что в некоторый момент времени мы наблюдаем из точки A неподвижную звезду S (черт. 3), находящуюся на перпендикуляре AS к плоскости эклиптики, т. е. плоскости земной орбиты. Наблюдая ту же звезду через полгода, т. е. из точки B земной орбиты, диаметрально противоположной точке A, мы можем обнаружить, что луч зрения BS отклоняется на угол $2p$ от перпендикуляра к эклиптике; угол $2p$ называется *параллаксом* звезды S. Если мы допустим, что пространство неевклидово (т. е. в нем имеет место аксиома Лобачевского), а звезда S бесконечно удалена от нас, то ее параллакс все же не будет равен нулю, а равен разности между прямым углом и углом α. Последний представляет собой угол параллелизма, соответствующий отрезку a, равному диаметру земной орбиты. Иначе говоря, мы будем иметь соотношение



Черт. 3.

$$\alpha = \frac{\pi}{2} - 2p = \Pi(a).$$

Однако наблюдаемая нами звезда находится на конечном расстоянии от Земли. Вследствие этого угол α дает только нижнюю границу возможного значения угла параллелизма ω. Подставляя в формулу (1) вместо x известное нам значение диаметра земной орбиты, а вместо ω — значение угла α, мы можем найти верхнюю границу значения абсолютного отрезка k, после чего мы уже можем применять формулы тригонометрии Лобачевского к любому треугольнику. Предположим теперь, что параллакс звезды S является наименьшим из всех доступных достоверному наблюдению. Применяя формулы тригонометрии к треугольникам, образованным диаметром земной орбиты и другими звездами с бо́льшими параллаксами, мы можем найти величины дефектов этих треугольников, т. е. оценить отклонение в их геометрии от геометрии Евклида.

Используя параллаксы, известные в его время, Лобачевский показывает, что эти отклонения ничтожно малы, и приходит к следующему заключению:

«После этого можно воображать, сколь эта разность, на которой основана наша теория параллельных, оправдывает точность всех вычислений обыкновенной Геометрии и дозволяет принятые начала этой последней рассматривать как бы строго доказанными [1]).

Предложив свой метод экспериментального обоснования евклидовой геометрии, Лобачевский не считал, однако, что этот метод дает окончательное решение вопроса. Он говорит только:

«Очень вероятно, что Евклидовы положения одни только истинные, хотя и останутся навсегда недоказанными» [2]).

С другой стороны, он указывает на мнение Лапласа, согласно которому:

«сама Природа указывает нам такие расстояния, в сравнении с которыми исчезают за малостию даже расстояния нашей Земли до неподвижных звезд» [3]).

Когда данные, определяющие расположение столь далеких объектов, станут доступными измерению, потребуются новые наблюдения и не исключена возможность, что они позволят обнаружить неевклидову природу пространства. На такую возможность Лобачевский указывает в «Пангеометрии» [4]). Он предполагает, что каким-либо способом, повидимому, отличным от метода измерения параллаксов, установлено, что наблюдаемый нами объект столь удален, что может быть практически принят за бесконечно удаленный. Если при этом обнаружится, что его наблюдаемый параллакс всё же отличен от нуля, то это будет служить доказательством неевклидовой природы пространства [5]).

В «Новых началах геометрии» Лобачевский подходит к вопросу об осуществимости своей системы еще с одной очень интересной стороны. Он начинает с утверждения, что в природе мы познаем

---

[1]) Н. И. Лобачевский, О началах геометрии, Полн. собр. соч., т. I, стр. 209.

[2]) Там же.

[3]) Там же.

[4]) Стр. 216 — 217 этой книги.

[5]) В допущении возможности установить удаленность объекта, не прибегая к измерению годового параллакса, нет ничего невозможного. Современная астрономия исходит при этом из спектральных данных или наблюдений собственных движений звезд. С этой точки зрения нельзя согласиться с Н. И. Идельсоном, который считает, что схема Лобачевского лишена смысла (см. его статью в «Историко-математических исследованиях», вып. II, М. — Л., 1949).

собственно только движение, и все наши понятия взяты в свойствах движения.

> «После чего в нашем уме не может быть никакого противоречия, если мы допускаем, что некоторые силы в природе следуют одной, другие своей особой Геометрии» [1]. «... Силы всё производят одни: движение, скорость, время, массу, даже расстояния и углы [2].

Чтобы пояснить свою мысль, Лобачевский указывает на возможность допущения, согласно которому воображаемой геометрии «следуют молекулярные силы», причем радиусы кривизны, соответствующие различным силам, различны, чем и обусловливается всё разнообразие этих сил. Лобачевский замечает, однако, что «это чистое предположение только, для подтверждения которого надобно поискать других убедительных доводов» [3].

V.

Оставляя открытым вопрос об осуществимости своей геометрии в реальном пространстве, Лобачевский был несомненно убежден в ее праве на существование как логической системы. Однако, подчиняясь, как и всюду, требованию полной строгости, он упорно ищет математического доказательства ее непротиворечивости. По его мнению оно становится возможным, когда геометрия «переходит в Аналитику», т. е. после построения тригонометрии [4]. Лобачевский отмечает, что из его тригонометрических соотношений вытекают, как предельные, соотношения евклидовой тригонометрии для бесконечно малых треугольников. С другой стороны, после замены сторон треугольника величинами ai, bi, ci эти же тригонометрические соотношения переходят в формулы обыкновенной сферической тригонометрии. Отсюда Лобачевский заключает: «Следовательно обыкновенная Геометрия, Тригонометрия и эта новая Геометрия всегда будут согласны между собою» [5].

Повидимому, эти рассуждения, приведенные Лобачевским в его первой статье «О началах геометрии», не удовлетворили его полностью. Поэтому в следующем своем сочинении «Воображаемая геометрия» он становится на другой путь. Принимая без вывода уравнения своей тригонометрии, он доказывает, что они совместны с положениями абсолютной геометрии и, вместе с тем, могут служить

---

1) Н. И. Лобачевский, Полн. собр. соч., т. II, стр. 159.
2) Там же.
3) Там же.
4) Н. И. Лобачевский, Пангеометрия, стр. 164 этой книги.
5) Н. И. Лобачевский, О началах геометрии, Полн. собр. соч., т. I, стр. 261.

основой для вывода основного факта неевклидовой геометрии: сумма углов треугольника меньше двух прямых.

Параллельно с этими опытами логического оправдания своей системы Лобачевский предпринимает огромный труд, направленный отчасти к той же цели: он строит аналитическую, дифференциальную и интегральную геометрию своего пространства, если понимать под последней систему методов, позволяющих вычислять длины дуг, площади, поверхности и объемы. Сравнивая выражения этих величин, полученных различными способами, Лобачевский получает многочисленные соотношения между определенными интегралами. Уверяясь аналитически в справедливости этих соотношений, он находит таким образом всё новые и новые подтверждения непротиворечивости своей геометрии.

Получение этих результатов преследует еще и другую цель: расширить возможности применения геометрии к анализу.

> «Как бы то ни было, — говорит Лобачевский, — новая Геометрия, основание которой уже здесь положено, если и не существует в природе, тем не менее может существовать в нашем воображении, и, оставаясь без употребления для измерений на самом деле, открывает новое, обширное поле для взаимных применений Геометрии и Аналитики» [1]).

Доказательства непротиворечивости, предпринятые Лобачевским, с современной точки зрения не могут считаться завершенными. Первое строгое доказательство равносильности утверждений о непротиворечивости геометрии Лобачевского и геометрии Евклида было дано Клейном в 1871 году, а арифметическое доказательство непротиворечивости последней — в начале XX столетия Гильбертом и В. Ф. Каганом. Однако и здесь мы не можем не склониться перед гением Лобачевского, который, на многие годы опередив свое время, первый поставил вопрос о необходимости доказательства непротиворечивости геометрии, первый указал путь его решения с помощью аналитического истолкования ее основных понятий и первый в своей «Воображаемой геометрии» указал на возможность построения геометрии на аналитической основе.

VI.

При жизни Лобачевский не встретил отклика на свои идеи. На родине они остались непонятыми, а на Западе Гаусс и Янош Больаи, вполне оценившие их значение, по разным причинам не высказались публично.

---

[1]) Н. И. Лобачевский, О началах геометрии, Полн. собр. соч., т. I, стр. 209—210.

Положение изменилось только через 10 лет после смерти Лобачевского. Опубликование переписки Гаусса привлекло внимание к проблемам неевклидовой геометрии, а Е. Бельтрами, сопоставив результаты Лобачевского с работами Ф. Миндинга [1]) о поверхностях постоянной кривизны, показал, что геометрия Лобачевского осуществляется на особой поверхности евклидова пространства — псевдосфере [2]). Этот результат рассеял подозрения в противоречивости геометрии Лобачевского; его идеи, получив всеобщее признание, начали со всё возрастающей силой влиять на общий ход развития математики.

Внимание геометров было прежде всего обращено на проблемы оснований их науки. Многочисленные изыскания, проведенные в этой области Клейном, Ли, Гельмгольцем, Пашем, Пеано и его школой, увенчались в начале текущего столетия установлением полной системы аксиом евклидовой и неевклидовой геометрии, разные варианты которых были предложены Гильбертом и В. Ф. Каганом. Были также поставлены и разрешены основные проблемы непротиворечивости, независимости и полноты этих систем. Путь решения этих проблем с помощью аналитического (точнее говоря, арифметического) истолкования основных геометрических понятий был, как мы это видели выше, предуказан Лобачевским.

Строгая аксиоматизация геометрии послужила примером и для других математических дисциплин: арифметики, математической логики, теории множеств, теории вероятности и некоторых разделов теоретической физики. Интенсивная работа в этом направлении продолжается, способствуя углубленному пониманию сущности математики и ее дальнейшему развитию.

Открытие неевклидовой геометрии положило начало разработке теории обобщенных пространств. Если до Лобачевского наука знала единственное евклидово пространство, а сам Лобачевский указал на возможность второго — неевклидова, то в настоящее время множество различных пространств с трудом поддается обозрению. Пространства Римана и Вейля, пространства аффинной, проективной и конформной связности, введенные Картаном и Скоутеном, пространства Финслера, П. А. Широкова, Келлера, В. Ф. Кагана и многие другие представляют общие понятия, заключающие бесчисленное множество частных случаев. Геометрии этих пространств строятся, как правило, на ана-

---

[1]) Ф. Миндинг (1806—1885) — ученик Гаусса, профессор Дерптского (Тартусского) университета. Работа Миндинга о поверхностях постоянной кривизны относится к 1840 году.

[2]) См. об этом: В. Ф. Каган, Лобачевский и его геометрия, М., 1955 (Очерк «Великий русский ученый Н. И. Лобачевский и его место в мировой науке», стр. 133—137).

литической основе, но и эта возможность была намечена Лобачевским в его «Воображаемой геометрии».

Построение этих многообразных и подчас весьма причудливых систем не является самоцелью. Они находят свое применение прежде всего при изучении с различных точек зрения сложных образов обыкновенного пространства: поверхностей, множеств прямых, кругов, сфер и т. д. Так, например, геометрия Лобачевского используется при изучении семейств кругов и сфер, геометрия Римана служит внутренней геометрией поверхностей, а геометрия аффинной связности — внутренней геометрией поверхностей, рассматриваемых с проективной точки зрения.

Еще более широкие приложения нашли обобщенные пространства в вопросах анализа, алгебры и теоретической физики. Лобачевский первый применил свою геометрию к вычислению интегралов. Опираясь на геометрию Лобачевского, Пуанкаре решил основную проблему теории автоморфных функций. Теория дифференциальных квадратичных форм геометризируется на основе системы Римана, и эта геометризация используется в физике и механике голономных систем. Одно из обобщений пространства Римана — неголономное пространство — возникло в связи с задачей распространения геометрических методов на механику неголономных систем. Теория неголономных пространств была значительно углублена в работах В. В. Вагнера, удостоенных премии Лобачевского в 1936 году. В. В. Вагнеру принадлежит также ряд глубоких исследований по разработке геометрических методов общей задачи вариационного исчисления.

Геометризация теории непрерывных групп привела Картана к понятию геометрического пространства. Ряд важных результатов в этой области получен П. А. Широковым и П. К. Рашевским.

Теория функций многих комплексных переменных находит свою геометрическую основу в теории биаксиального, биаффинного, келлерова пространства.

В начале XX века физика пережила один из глубочайших переворотов, которые знала история науки. Опираясь на бесспорные эксперименты, А. Эйнштейн создал в 1905 году свою теорию относительности, которая привела физиков к коренному пересмотру взглядов на пространство и время. В 1908 году Г. Минковский показал, что математическая схема новой теории приводит к рассмотрению четырехмерного пространства (пространства Лоренца), геометрия которого близка к евклидовой, но всё же существенно от нее отличается. Позднее Варичак обратил внимание на глубокие аналогии между теорией относительности и геометрией Лобачевского, а Клейн и А. П. Котельников обнаружили причину этих аналогий: группа вращений

пространства Лоренца совпадает по своей структуре с группой движений пространства Лобачевского. Таким образом была обнаружена глубокая связь геометрии Лобачевского с физикой.

Дальнейшее развитие идей Эйнштейна привело его в 1916 году к созданию новой теории тяготения, которую он назвал общей теорией относительности. В ее основу сразу была положена геометрическая схема. Эйнштейн предположил, что поле тяготения проявляется в «искривлении» пространственно-временно́го многообразия, т. е. в отклонении его геометрии от геометрии Лоренца и в замене ее более общей римановой геометрией.

Работа ряда физиков и математиков над построением единой теории гравитационного и электромагнитного поля, в которой сам Эйнштейн принимал участие до последних дней своей жизни, еще не может считаться законченной. Однако и в ее основу кладется геометрия обобщенных пространств еще более сложной природы, чем геометрия Римана.

Таким образом, идея Лобачевского о связи геометрии с природой сил, действующих в пространстве, нашла свое подтверждение в ряде теорий современной физики.

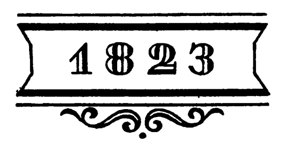
VII.

Заканчивая этот очерк, мы не можем не вспомнить с благодарностью имена тех, кто способствовал распространению идей великого геометра на его родине: Алексея Васильевича Летникова (1837—1888), который первый в нашей печати признал значение открытия Лобачевского и опубликовал свой перевод его «Геометрических исследований», Александра Васильевича Васильева (1853—1929), исследователя жизни и творчества Лобачевского и организатора международного конкурса его имени, Александра Петровича Котельникова (1865—1944), изучившего связь геометрии Лобачевского с механикой и составившего глубокие комментарии к его первой работе, Петра Алексеевича Широкова (1895—1944), автора ряда исследований по геометрии Лобачевского и ее обобщениям, Николая Григорьевича Чеботарева (1894—1947), подготовившего переиздание алгебраических работ Лобачевского.

Особо должны быть отмечены труды Вениамина Федоровича Кагана (1869—1953), который всю свою долгую научную жизнь посвятил распространению и развитию идей Лобачевского. Ему принадлежат первое в нашей литературе оригинальное изложение неевклидовой геометрии и большое число статей, брошюр, монографий и учебников, посвященных тому же вопросу. Под влиянием изучения трудов Лобачевского В. Ф. Каган предпринял большой труд построения и иссле-

дования полной системы аксиом геометрии, который и завершил в 1902 году. Он открыл и исследовал субпроективные пространства и поставил задачу метрической двойственности. В. Ф. Каган был главою научной школы, представители которой в Москве, Казани, Саратове, Горьком и других городах Советского Союза продолжают разработку проблем неевклидовой геометрии. Последним научным подвигом В. Ф. Кагана было издание полного собрания сочинений Лобачевского, главным редактором которого он состоял до конца своей жизни.

ГЕОМЕТРИЯ



безгранныхъ помощію трехъ плоскостей, вершинной съ нимъ уголъ раздѣлится тѣми же плоскостями на одинаковые части, а слѣдовательно вершинные углы равны.

Представляемъ часть поверхности шара, вырѣзанную плоскостями трегранного тѣлесного угла, вершина котораго занимаетъ мѣсто центра шара. Линіи a, b, c пусть будутъ линіи пересѣченія плоскостей съ поверхностью шара, точки A, B, C пусть будутъ точки пересѣченія линій между собою, взятыя такъ, чтобъ A лежало противъ a, B противъ b, C противъ c. Продолжаемъ a въ обѣ стороны на поверхности шара, покуда составится полной кругъ. Дуги b и c продолжаемъ за точку ихъ пересѣченія A покуда онѣ дойдутъ до круга отъ a. Получатся четыре тѣлесныхъ угла X, Y, Z и Y ABC. Означимъ чрезъ $\angle A$ плоскостной уголъ въ Y ABC противъ дуги a, чрезъ $\angle B$, $\angle C$ два другіе угла противъ дугъ b и c. Легко видѣть, что

$$\curlywedge ABC + Y = \angle B; \quad \curlywedge ABC + Z = \angle C$$

Точно также вершинной уголъ съ угломъ X, а слѣдственно вмѣсто него и самый уголъ X даетъ

$$\curlywedge ABC + X = \angle A$$

Наконецъ сумма всѣхъ четырехъ тѣлесныхъ угловъ X, Y, Z и $\curlywedge ABC$ составляетъ 200°, что присоединяя къ предъидущимъ тремъ уравненіямъ, выводимъ:

$$\curlywedge ABC = \frac{\angle A + \angle B + \angle C - 200^\circ}{2}$$

Страница рукописи Лобачевского «Геометрия».

ВСТУПЛЕНИЕ

Часть чистой Математики, в которой предписываются способы измерять пространство, называется *Геометриею* [1].

Геометрическое тело удерживает одно только свойство *протяжения* от тел природы.

Протяжение есть свойство тел, распространяясь, приходить в прикосновение друг с другом [2].

В природе все тела троякого протяжения, но можно представлять одно только протяжение — в *линиях*, двоякое — в *поверхностях*, и наконец все три в *телах* [3]. Итак линии, поверхности и тела составляют Геометрические величины. Посему и Геометрия может быть разделена на три части: о измерении линий (Лонгиметрия), о измерении поверхностей (Планиметрия) и о измерении тел (Штереометрия) [4].

Соединение Геометрических величин происходит через их взаимное прикосновение. Измерение их состоит в наполнении измеряемого несколько раз взятой мерою, или частями ее, соединяя их через прикосновение [5]. Начало и конец линии принимает в Геометрии общее название *точки*.

Представляя линию составленною из других, можно допускать точки во всем ее протяжении.

Линии *касаются*, если у них общая точка и одна линия остается на одной только стороне в отношении к другой [6]. Линии *пересекаются*, если у них точка общая и одна линия переходит в отношении к другой с одной стороны на другую. Линии *сливаются*, или совпадают, когда они неразличествуют, или когда у них есть часть общая. Подобно и поверхности касаются в точках, или линиях, пересекаются в линиях и сливаются все, или в частях. Геометрия оканчивается там, где покажутся способы измерения всех Геометрических величин. За нею следует приклад Аналитики к Геометрии [7].

3 Зак. 754. Н. И. Лобачевский

ГЛАВА I

ИЗМЕРЕНИЕ ЛИНИЙ

Прямыми линиями называются те, которые сливаются, как скоро у них две общие точки, и которые не могут не сливаться при двух общих точках [8]. *Плоскость* есть поверхность, которая всегда сливается с прямой линией [9]. *Круг*, или, справедливее, *круговая линия*, есть такая линия в плоскости, для которой возможна точка вне ее на равном расстоянии от всех ее точек. Расстояния сии названы *полупоперешниками*, а общая точка, от которой они берутся — *центром круга*. Посему круги различествуют между собою, если у них не равны полупоперешники, и сливаются только тогда, когда полупоперешники равны и центр общий. Части круга называются *дугами*, и, по свойству круга, сливаются, когда у них общий центр. Круг, рассматриваемый в целости, но отдельно от центра и полупоперешников, называется также *окружность* [10].

Для измерения прямой линии можно брать за меру также прямую линию, потому что мера такая, будучи несколько раз взята, или ее части сливаются с измеряемою прямой и могут ее наполнять. Подобно и для измерения дуги может служить мерою часть того же круга. Пусть дается линия A, прямая или дуга круга, и B ее мера также прямая линия в первом случае и дуга того же круга в другом случае. Пусть B укладывается n раз в A с остатком $B' < B$; пусть потом B' уложится n' раз в B с остатком $B'' < B'$; остаток B'' в B' уложится n'' раз с остатком $B''' < B''$; остаток B''' в B'' снова n''' раз с остатком $B^{\mathrm{IV}} < B'''$ и т. д. Наконец недолжно выходить остатку или, что все равно, быть так малу, что чувства не могут его давать знать, того менее орудие мерять. Пусть это случится при линии Q, когда она в предъиду-

щей P ляжет p раз. Все такое измерение будет представлено уравнениями:

$$A = nB + B'; \quad B = n'B' + B''; \quad B' = n''B'' + B''';$$
$$B'' = n'''B''' + B^{\text{IV}}, \text{ и т. д. } P = pQ.$$

Отсюда

$$\frac{A}{B} = n + \cfrac{1}{n' + \cfrac{1}{n'' + \cfrac{1}{n''' + \cfrac{1}{n^{\text{IV}} + \text{ и т. д.} \ldots + \frac{1}{p}}}}}.$$

Что все приводя в одну дробь, величина линии A будет произведение сей дроби на B, а самая дробь — содержание линии A к B [11].

Для измерения, как прямых линий, так и кривых, берется прямая линия *метр* и его десятые, сотые, тысячные и т. д. части [12]. Но как для измерения требуется, чтоб мера, или ее части, накладываясь на измеряемую линию, наполняли ее, а кривые линии не могут сливаться с прямыми, то и их измерение в строгом смысле невозможно. Что же разумеют в Геометрии под измерением кривых линий, состоит в том, чтоб разделять кривые линии на весьма малые части тем менее, чем хотят более соблюдать строгости; потом вместо сих частей принимать прямые, соединяющие их концы, тогда сумма всех сих прямых дает длину кривой линии. Способ сей заимствован из самого измерения, употребляемого нами в природе: окружности колес меряются цепью, которой звенья представляют прямые линии, взятые вместо частей кривой линии. Измерение почитается тем вернее, чем звенья цепи мельче; а последняя точность будет достигнута, если вместо цепи возьмется гибкая нить, т. е. цепь с неприметно малыми звеньями. Впрочем измерение целых линий составляет часть Аналитики, где дифференциальное исчисление показывает способ для всякой линии находить такую величину, к которой тем более приближается мера данной кривой линии, чем мельче она разделится на части, и эта-то величина почитается истинною мерою кривой линии [13].

ГЛАВА II

ОБ УГЛАХ

Для сравнения дуг в круге величины их выражаются в четырехсотых частях окружности, которые части называются *градусами*. Они разделяются вновь на десятые, сотые, тысячные и т. д. части [14]. Градусы выражаются целыми числами со знаком ° наверху, напр. 25°; части же градуса выражаются десятичною дробью.

Две сходящиеся прямые линии должны встретиться только в одной точке, иначе они не были бы прямые.

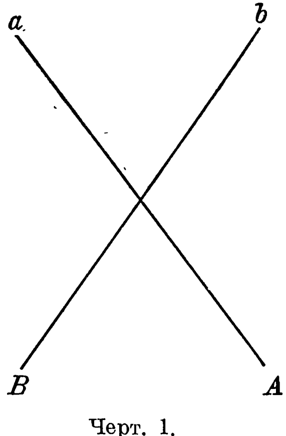
Углом называется выраженная в градусах дуга между двух сходящихся линий прямых, описанная из точки их пересечения. Ясно, что число градусов такой дуги остается то же, какой бы ни был полупоперешник; ибо здесь дуги разных полупоперешников будут соответственно укладываться на их окружностях [15].

Углы, о которых здесь говорится, называются *линейными*, когда надобно их отличить от других углов, взятых не между линий. Угол в 100° называется *прямым*; а две линии, составляющие такой угол, будут *перпендикулярны* друг к другу, каждая перпендикуляром к другой. Две линии, сходясь под углом 200°, составляют одну прямую линию.

На линии из всякой точки можно восставить перпендикул; ибо около всякой точки можно описать полкруга с одной стороны, воображать полукруг разделенным пополам; тогда чрез средину будет проходить перпендикул. Здесь же видно, что перпендикул из точки на линии в плоскости может быть только один.

Угол между двумя линиями, когда они не переходят за точку пересечения, может быть взят с двух сторон, но обыкновенно берется меньший из двух. Угол двух линий, когда они продолжатся

за точку пересечения, может быть взят также различно. Если две линии *a* и *b* (черт. 1) сходятся в общую точку и продолжения их за точку пересечения назовем соответственно *A* и *B*, то угол между *a* и *b* и угол между *A* и *B* разнятся только в положении, но одинаковы по величине; ибо как тот, так и другой составляют 200° с углом между *a* и *B*. Также углы у *a* с *B* и у *b* с *A* будут равны. Такие углы называются *вертикальными*. Два угла у *a* с *b* и у *B* с *a* или им равные будут как тот, так и другой принадлежать к двум прямым; посему надобно всегда означить, который именно из двух разумеется углом пересекающихся линий.



Черт. 1.

Две плоскости пересекаются в прямой линии, что составляет необходимое требование определения плоскостей [16]. Угол двух плоскостей или *плоскостной* угол есть угол между перпендикулами, проведенными в двух плоскостях к линии пересечения [17]. Продолжение плоскостей за линию пересечения составит вертикальные углы, [которые,] как и в прямых линиях, между собою равны. Здесь также надобно означать, который из двух углов надобно разуметь углом двух пересекающихся плоскостей. Когда угол двух плоскостей прямой, то плоскости будут перпендикулярны одна к другой.

Углы линейные и плоскостные называются *острыми*, когда они $< 100°$; *тупыми*, когда $> 100°$.

Угол [прямой] линии с плоскостью называется угол, который делает линия с линиею пересечения данной плоскости плоскостию, к нею перпендикулярною и проходящею вместе чрез линию.

Поверхность *шара* называется поверхность, которой все точки на одинаковом расстоянии от одной — центра шара. Равные расстояния будут *полупоперешники* шара; два полупоперешника в прямой линии составляют *поперешник*. Части поверхности шара сливаются с поверхностию шара во всяком месте, когда у них общий центр. Свойство частей поверхности шара сходно со свойством дуг в отношении к кругу, почему можно допускать и измерение частей поверхности шара подобным образом [18].

Поверхности ограничиваются линиями. Плоскости могут быть ограничены или прямыми, или кривыми линиями. Ограниченные прямыми линиями называются вообще *многоугольниками*, которых прямые линии будут *стороны*. Менее трех сторон не могут ограничивать плоскости; если сторон три, то плоскость получает название *треугольника*, если четыре, то — *четыреугольника* и т. д. по числу сторон. Части многоугольников суть: стороны, углы, [число] которых всегда одинаково с числом сторон, и *площадь*, название, принятое для означения всей плоскости многоугольника.

Треугольники, которых две стороны равны, называются *равнобедренными*, а у которых все три стороны равны — *равносторонними*. В равнобедренном треугольнике неравная сторона называется *основанием*, две равные стороны — *бедрами*. Треугольник, у которого один угол прямой, называют *прямоугольным*, сторону против прямого угла — *гипотенузою*, две прочие — *катетами*. Плоскость, ограниченная круговою линиею, называется обыкновенно *кругом*, ограниченная хордою и дугою — *отрезком*, дугою и двумя полупоперешниками — *вырезком* [19].

Тела ограничиваются или плоскостями, или кривыми поверхностями. Если тело ограничивается одними только плоскостями, то части такого тела будут: самые плоскости — *стороны*, *плоскостные*, *телесные углы* и *объем* — пространство внутри тела. Стороны тела встречаются друг с другом в прямых линиях, которые называются *ребрами*.

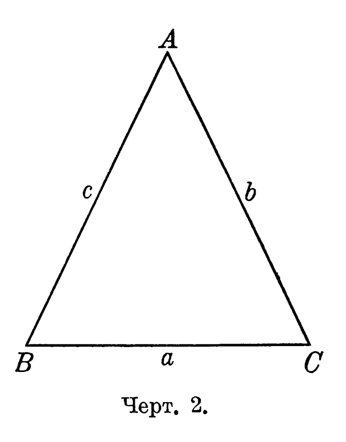
Если тело ограничивается треугольниками, составляющими телесный угол, и еще треугольником или многоугольником, который довершает ограничение, то такое тело называется *пирамидой*. Она будет *треугольная*, если все стороны ее треугольники; *многоугольная*, если в ней найдется многоугольник, который означается всегда названием: *основание* пирамиды.

ГЛАВА III

О ПЕРПЕНДИКУЛАХ

Способ восставлять из точек к линии или плоскости перпендикулы и опускать из точки на линию или на плоскость перпендикул взят из свойств равнобедренных треугольников, которые заключаются в следующем:

В равнобедренном треугольнике углы против равных сторон равны. Пусть в $\triangle ABC$ (черт. 2) сторона $b = c$, то покрывая такой треугольник им же, начиная класть точку A на A, линию b на c, и как угол остается тот же, то и c покроет b; тогда по равенству b и c точка C будет в B, точка B в C, сторона a покроет сторону a и след. $\angle B$ покроется углом C, т. е. $\angle B = \angle C$ [20].



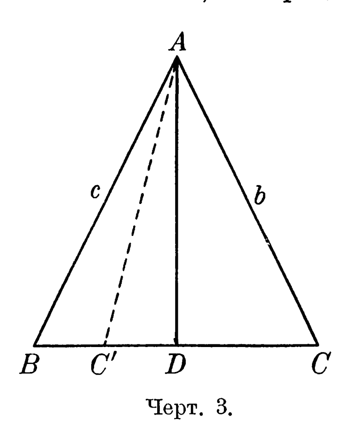
Черт. 2.

Обратно, если в треугольнике два угла равны, то против них и стороны равны. Пусть в $\triangle ABC$ будет $\angle B = \angle C$, то накрывая $\triangle ABC$ им же, начиная класть точку C в B, линию a в a, и соединяя плоскости по равенству углов B и C, сторона b должна сливаться с c, сторона c с b, а следовательно пересекаться в той же точке A, что и покажет, что $b = c$. Такие треугольники, у которых два угла равны, будут, следовательно, равнобедренные.

Равносторонние [треугольники], так как они вместе и равнобедренные, должны иметь все три угла равные, и обратно: треугольники, у которых все три угла равные, должны быть равносторонние.

В равнобедренном треугольнике линия, проходя чрез вершину и средину основания, будет перпендикулярна к основанию и

разделит угол при вершине пополам; если же проходит чрез вершину и делит угол пополам, то будет перпендикулярна к основанию и разделит основание пополам; если перпендикулярна к основанию, то разделит его пополам и угол при вершине.

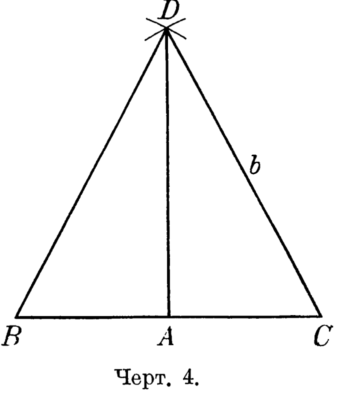


Черт. 3.

В $\triangle ABC$ (черт. 3), если $b=c$, а след. $\angle B=\angle C$, если D средина основания a, то $\triangle ADC$ будет покрывать $\triangle ADB$, когда полагаем один на другой стороною DC на DB, стороною b на c, следовательно $\angle ADB=\angle ADC=100°$, $\angle BAD=\angle DAC$.

Когда AD разделяет $\angle A$ пополам, то опять $\triangle ADC$. покроет $\triangle ADB$, полагая один на другой стороною b на c, удерживая AD общей, а следовательно $BD=DC$, $\angle ADB=\angle ADC$.

Если AD перпендикулярна к BC, то, перенося $\triangle ADC$ на $\triangle ADB$, удерживая AD общей, сторона DC пойдет по DB и не может окончиться в C', иначе вышло бы $\angle AC'B=\angle B$, а как $\angle ACD$ [а вместе с тем и $\angle AC'D$] так же равен $\angle B$, то AC' должно бы быть перпендикулярно к BC вместе с AB, AC и AD, что не может быть; иначе продолжения AC и AB по другую сторону BC сошлись бы снова [21].

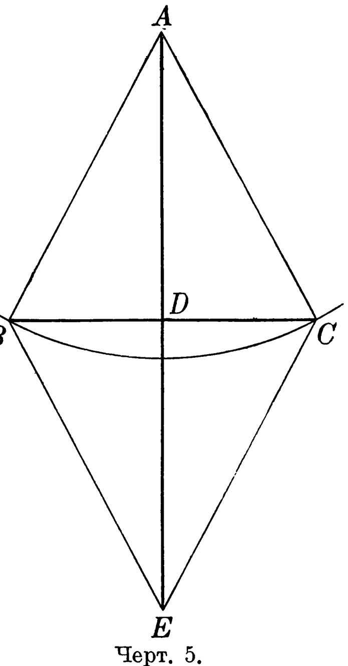


Черт. 4.

И так, чтобы восставить перпендикул из точки A на линии (черт. 4), надобно взять равные линии AB и AC, потом линию $b > AB$, точки B и C взять за центры, около них описать круги, такие круги необходимо пересекутся где нибудь в точке D [22], и AD будет перпендикулом к BC.

Чтоб опустить перпендикул из точки A на BC (черт. 5), надобно взять где нибудь [на данной прямой] точку B и около A полупоперешником AB описывать круг. Если круг не будет переходить на другую сторону линии BC, то взять полупоперешник более AB, тогда это случится непременно. Круг, проходя с одной стороны на другую, пересечет линию в двух точках B и C. От

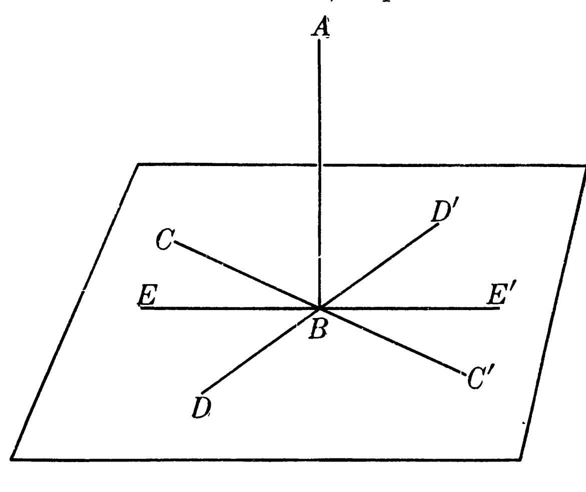
точек B и C, полагая на другую сторону равные линии BE и EC [23], потом проводя линию AE, составим два треугольника AEB и AEC, которые одинаковы, потому что покрывают друг друга, когда положатся один на другой стороною EC на EB и AC на AB, а след. $\angle BAD = \angle CAD$ и AD перпендикулярна к BC.



Черт. 5.

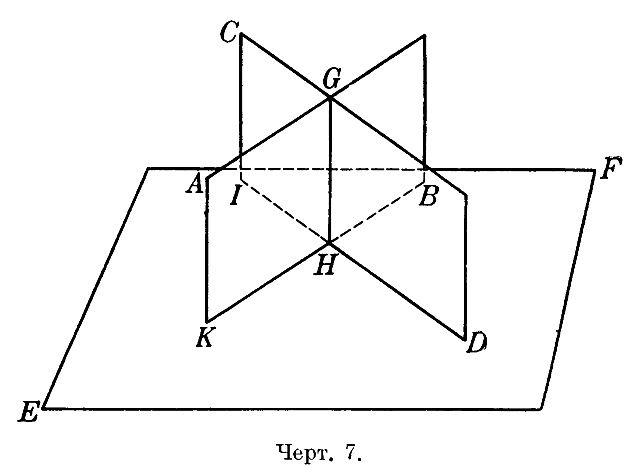
Перпендикулом к плоскости называют такую линию, которая стоит перпендикулярно на всех линиях, проведенных в плоскости чрез точку пересечения. Довольно, чтоб линия стояла перпендикулярно на двух линиях в плоскости, тогда уже она будет перпендикулярна и ко всем, а следовательно будет перпендикулом [к] плоскости.

Пусть (черт. 6) AB перпендикулярна к CC' и DD' в точке их пересечения B, то AB будет перпендикулярна и ко всякой третьей EE'. Отделяем линии AB, BC, BE, BD, удерживая их взаимное положение, переносим их на прочие линии так, чтоб точка B оставалась на своем месте, потом накладываем плоскость ABD на плоскость ABD'; то по равенству вертикальных плоскостных углов плоскость ABC покроет плоскость ABC', по равенству же прямых углов линия BD ляжет на BD', BC на BC' и следовательно плоскость DBC на $D'BC'$; наконец по равенству углов EBD и $E'BD'$ линия BE сольется с линиею BE', то есть углы ABE и ABE' будут равны, то есть каждый [из них] прямой [24].



Черт. 6.

Две плоскости пересекаются в линии, перпендикулярной к третьей плоскости, к которой они вместе перпендикулярны. Когда (черт. 7) плоскости *AKB* и *CID* перпендикулярны к плоскости *EF*, то линия пересечения *GH* двух первых будет перпендикулом



Черт. 7.

[к] последней. Переносим плоскости *CD* и *AH*, сохраняя их взаимное положение, на плоскости *CD* и *GB*. Точку *H* оставляем на своем месте, линию *HD* кладем на *HI*, плоскость *EF* снова на *EF*, то равенство углов *KHD* и *BHI* заставит линию *HK* слиться с линией *HB*, наконец равенство прямых углов требует, чтоб плоскость *GD* сливалась с плоскостью *CH*, плоскость *KG* с плоскостью *GB*, и следовательно их общая линия пересечения будет *GH*, углы *GHI*, *GHD*, *GHK* и *GHB* равны между собою и все прямые [25].

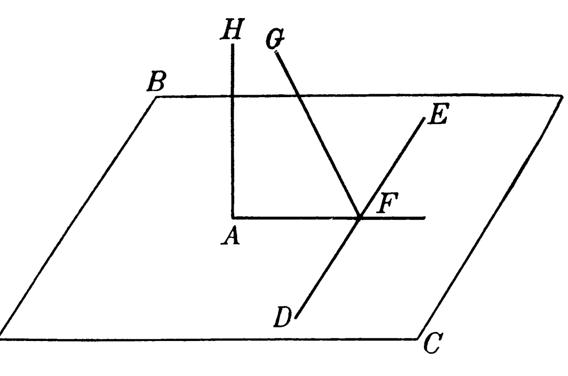
Перпендикул к линии пересечения двух перпендикулярных друг к другу плоскостей бывает перпендикулом к одной, когда он лежит в другой. Иначе третья перпендикулярная плоскость на первой в пересечении со второй, проходя чрез пяту перпендикула, произвела бы другой перпендикул к линии пересечения двух первых плоскостей.

Плоскость, проходя чрез перпендикул [к] другой, бывает к ней перпендикулярна. Потому что линия, проведенная во второй плоскости чрез пяту перпендикула под прямым углом к линии пересечения двух плоскостей, делает прямой угол с перпендикулом, который и будет углом двух плоскостей.

Из того, что было доказано перед этим о перпендикулярных плоскостях и перпендикулярных линиях, следуют правила, как из

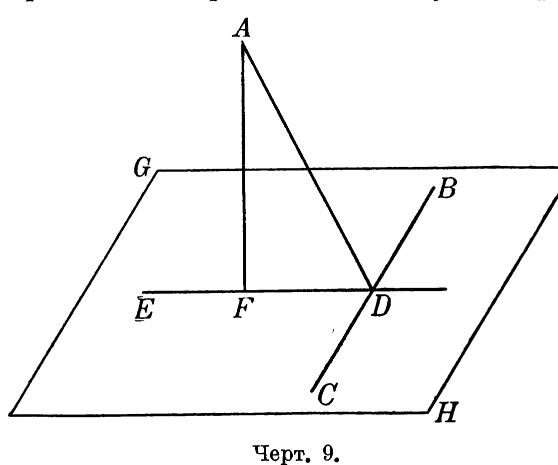
точки на плоскости восставить перпендикул и опустить на плоскость перпендикул из точки.

Чтобы восставить перпендикул на плоскости [26], надобно взять произвольно линию в данной плоскости вне данной точки на плоскости, потом к этой линии вести перпендикул из данной точки, другой перпендикул вне плоскости [27], чрез две последние линии провести плоскость и в ней перпендикулярную линию к линии в данной плоскости, которая была проведена из данной точки.



Черт. 8.

Пусть дается точка A в плоскости BC (черт. 8), ведем в сей плоскости произвольно линию DE, опускаем на нее из точки A перпендикул AF и другой перпендикул FG вне плоскости BC, то плоскость, проведенная чрез AF и GF, будет перпендикулярна к линии DE, а следовательно и к плоскости CB; посему перпендикул AH на AF в плоскости AFG будет перпендикулом к плоскости BC.



Черт. 9.

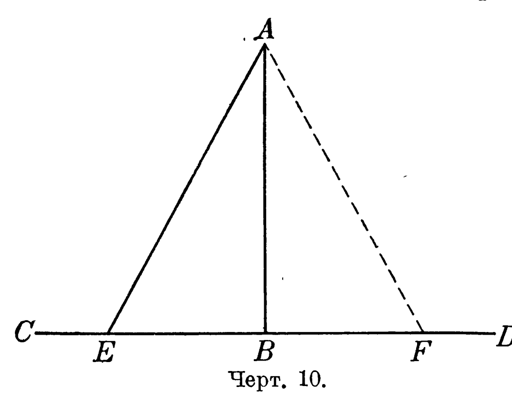
Чтоб опустить перпендикул из точки на плоскость, надобно произвольно провести линию в плоскости, на нее опустить перпендикул из данной точки, другой перпендикул провести в плоскости чрез пяту первого и на сию последнюю линию опустить перпендикул из данной точки. Пусть дается точка A и плоскость GH (черт. 9). Ведем в GH произвольно линию BC, из A опускаем на нее перпендикул AD, чрез точку D ведем другой перпендикул ED в плоскости GH и к сей последней линии ведем перпендикул AF,

который и будет перпендикулом [к] плоскости GH, по тем же причинам, что и выше.

Отсюда же выходит способ ставить перпендикулярные плоскости. Если дается линия на плоскости и требуется чрез нее провести перпендикулярную плоскость к данной, то надобно проводить перпендикулярную линию в плоскости к данной линии, и к этой вновь проведенной приставить перпендикул вне плоскости в точке пересечения двух первых, чрез эту последнюю линию и данную вести плоскость, которая и будет требуемая [28].

Если надобно провести перпендикулярную плоскость к другой чрез линию вне ее, то стоит только опустить из двух точек на данной линии перпендикулы, и чрез них провести плоскость [29], или, когда данная линия пересекает плоскость, в точке пересечения провести по плоскости к ней перпендикулярную линию, другую перпендикулярную к сей последней в плоскости, чрез которую уже и данную проводить плоскость. Последний способ короче, но предполагается, что линия пересекает плоскость, или может пересечь по достаточном продолжении. Доказательство видно само собою [30].

Перпендикулы представляют кратчайшие расстояния точки от линии и от плоскости. Если AB перпендикулярна к CD (черт. 10), то AB менее всякой другой линии AE, проведенной от A к той же линии CD. По другую сторону линии AB воображаем $\triangle ABF$, одинаковый с $\triangle ABE$, для чего нужно только BE перенести на другую сторону точки B. Круг, описанный из точки A полупоперешником AE, пройдет чрез E и F и не пересечет более ни в какой третьей точке линии CD, иначе бы вышел равнобедренный треугольник, в средине которого мог бы провестись другой перпендикул из точки A к линии CD. Отсюда видно, что AB должна быть продолжена, чтоб дойти до окружности, описанной AE, а след. $AB < AE$ [31].



Черт. 10.

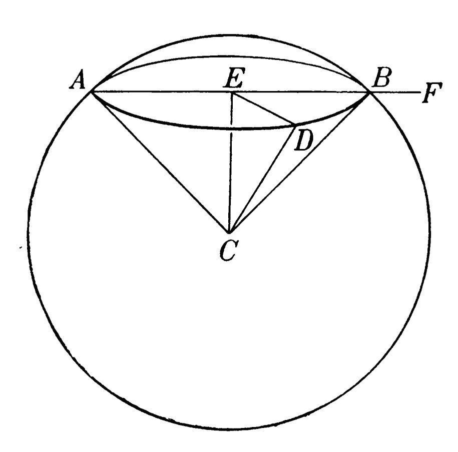
Перпендикул из точки на плоскость тоже будет кратчайшее расстояние, иначе нашлось бы, что на линии перпендикул длиннее наклонной линии.

ГЛАВА IV

ИЗМЕРЕНИЕ ТЕЛЕСНЫХ УГЛОВ. О ПРАВИЛЬНЫХ МНОГОУГОЛЬНИКАХ И ТЕЛАХ

Поверхность шара, подобно кругам, разделяется на 400 равных частей плоскостями, проходящими чрез один поперешник. Сии части называются *градусами*, и подразделяются на десятые, сотые и т. д.

Часть поверхности шара, вырезанная плоскостями, проходящими чрез центр, и которой величина назначается в градусах, называется *телесным углом* [32]. Плоскости, составляющие телесный угол, будут *грани* угла, и по числу сих плоскостей называется угол *трегранным*, *четырегранным* и т. д.



Черт. 11.

Точно так же как многоугольники могут быть произведены из сложения и вычитания треугольников, так и многогранные телесные углы производятся из трегранных. Посему измерение телесных углов вообще приводится к измерению одних только трегранных.

Плоскость, пересекая поверхность шара, дает в пересечении круг.

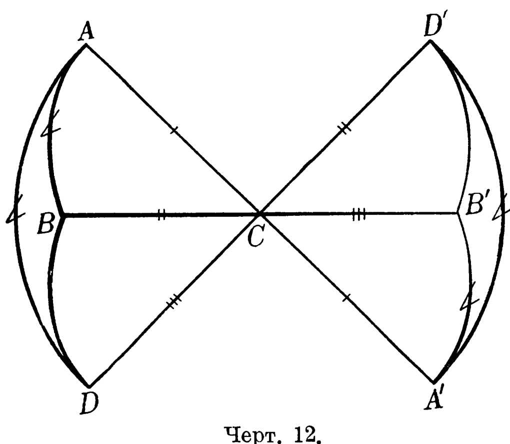
Перпендикул CE (черт. 11) из центра шара C на плоскость ADB, которая пересекает поверхность шара по линии ADB, не может падать вне шара, например, в точку F, иначе бы линия AF, проведенная по плоскости внутрь шара, дала бы две точки пересечения A и B на поверхности шара, которые с центром C образовали бы

равнобедренный треугольник, а в нем мог бы провестись перпендикул к линии AF кроме CF [33]. Две точки A и D, взятые произвольно на линии ADB, образуют с центром два треугольника ACE и DCE, которые будучи положены один возле другого в одну плоскость, удерживая линию CE общею, составят равнобедренный треугольник, где CE из вершины будет идти перпендикулярно к основанию, а следовательно $AE = ED$. Так и все подобные линии AE и ED равны между собою, то есть линия ADB круг, точка E его центр.

Посему все телесные углы ограничены на поверхности шара кругами равного полупоперешника с шаром и притом самого большого полупоперешника [34]. Вот почему одноцентрные круги с шаром на поверхности его называются самыми большими кругами.

Вершина телесного угла есть общая точка пересечения граней. Продолжение граней за точку пересечения образует другой телесный угол, который с первым называются *вершинными*. *Равнобедренный* и *равносторонний* [трехгранный] телесный угол — те, в которых две, или все три грани равны.

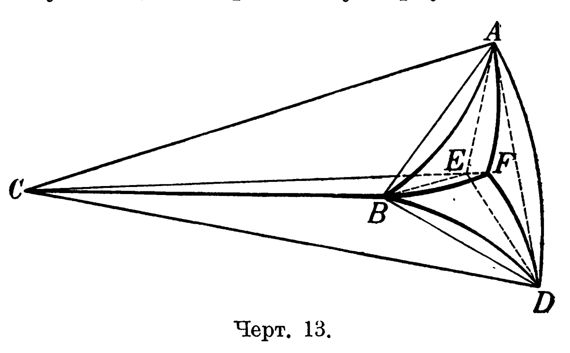
Вершинные телесные углы равны [35]. Нужно показать это только над трегранными углами, потому что плоскости, разделяющие один из вершинных углов на трегранные, разделяют продолжением за вершину и другой угол на столько же трегранных углов.



Черт. 12.

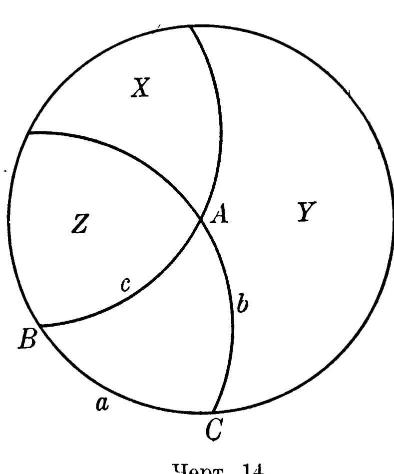
Если в трегранном телесном угле $CABD$ (черт. 12) грани ACB и ACD равны, то вершинный с ним угол $CA'B'D'$ совершенно одинаков; ибо, полагая $\angle ACB$ на $\angle A'CD'$, равенство плоскостных углов между CAB и CAD заставит и плоскость ACD покрыть плоскость $A'CB'$, а как вместе и $\angle ACD = \angle A'CB'$, $\angle ACB = \angle A'CD'$, то линия CB сольется с CD', CD с CB', так один угол будет совершенно наполнять другой [36].

Если же телесный угол *CABD* (черт. 13) не равнобедренный, то проводим чрез точки *A*, *B*, *D* на поверхности также плоскость, опускаем на нее перпендикул *CE*, то произойдут треугольники *AEC*, *BEC*, *DEC* с равными углами *ACE*, *BCE*, *DCE*; потому что они, удерживая линию общею *CE*, и будучи поставлены один возле другого в одну плоскость, составляют равнобедренный треугольник, в котором линия чрез вершину перпендикулярна к основанию. Отсюда следует, что *CE*, будучи продолжено до *F* на поверхности шара, дает равные дуги *AF*, *BF* и *DF*, то есть, что телесный угол *ABD* разделяется на три равнобедренные телесные угла *AFB*, *BFD*, *DFA*, которые должны все складываться, или одни вычитаться из других, смотря по тому, *F* упадет ли внутрь телесного угла, или вне.



Черт. 13.

Теперь, когда телесный угол разделится на три равнобедренных помощию трех плоскостей, вершинный с ним угол разделится теми же плоскостями на одинаковые с ними, а следовательно вершинные углы равны.



Черт. 14.

Представляем часть поверхности шара, вырезанную плоскостями трегранного телесного угла, вершина которого занимает место центра шара. Линии *a*, *b*, *c* (черт. 14) пусть будут линии пересечения плоскостей с поверхностию шара, точки *A*, *B*, *C* пусть будут точки пересечения линий между собою, взятые так, чтоб *A* лежало против *a*, *B* против *b*, *C* против *c* [37]. Продолжаем *a* в обе стороны на поверхности шара, покуда составится полный круг. Дуги *b* и *c* продолжаем за точку их пересечения *A*, покуда они дойдут до круга от *a*. Получатся четыре телесных угла *X*, *Y*, *Z* и ⋎ *ABC* [38].

Означим чрез $\measuredangle A$ плоскостной угол в $\curlyvee ABC$ против дуги a, чрез $\measuredangle B$, $\measuredangle C$ два другие угла против дуг b и c. Легко видеть, что

$$\curlywedge ABC + Y = \measuredangle B;$$
$$\curlywedge ABC + Z = \measuredangle C.$$

Точно так же вершинный угол с углом X, а следственно вместо него и самый угол X дает

$$\curlywedge ABC + X = \measuredangle A.$$

Наконец сумма всех четырех телесных углов X, Y, Z и $\curlywedge ABC$ составляет 200°, что присоединяя к предъидущим трем уравнениям, выводим:

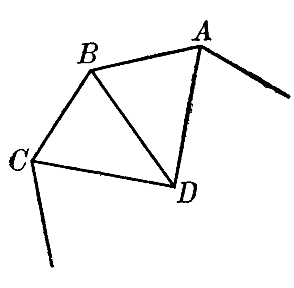
$$\curlywedge ABC = \frac{\measuredangle A + \measuredangle B + \measuredangle C - 200^\circ}{2}\ [39].$$

Так определяется телесный [трехгранный] угол помощию плоскостных.

Отсюда не трудно вывести, как определяется величина всякого телесного угла из плоскостных, его составляющих. Если разделяем телесный угол на трегранные, следуя выше изъясненному способу, то видим, что для числа граней n величина телесного угла будет:

$$\frac{1}{2} \cdot \{\text{сумма плоскостных углов} - (n-2)\,200^\circ\}.$$

Отсюда выводятся важные заключения о правильных телах. Но для полноты предмета скажем сперва о *правильных многоугольниках.* Так называются те, у которых все стороны и все углы равны. Правильный многоугольник с n сторонами можно произвести, разделив круг на n равных частей и точки разделения соединив линиями. Тогда центр круга называется вместе и *центром* правильного многоугольника. Обратно, во всяком правильном многоугольнике находится центр. Разделяем для сего один из углов линиею [пополам]. Такая линия пройдет через весь многоугольник и разделит его на две одинаковые части. Отсюда следует, что другая подобная линия пересечет первую внутри многоугольника. Пусть AD разделяет угол A пополам (черт. 15), BD разделяет угол B, равный с A, пополам, а D их точка пересечения. В $\triangle ABD$



Черт. 15.

две стороны AD и BD будут равны, третья линия CD производит $\triangle CBD$, одинаковый с $\triangle ABD$, как скоро угол $C = B = A$ и линия $BC = BA$ [40]. Ибо, накладывая $\triangle ABD$ на $\triangle DBC$, оставляя BD общею стороною, линия BA должна упасть на BC точкою A на C, следовательно $AD = DC$ и $\angle DCB = \angle DAB = \frac{1}{2} \angle A$. Так и все расстояния от D вершин углов в правильном многоугольнике будут равны AD, то есть D — центр многоугольника.

Итак, правильные многоугольники возможны со всяким числом сторон, и в каждом правильном многоугольнике есть центр.

Правильным телом называется то, которое ограничено правильными многоугольниками и которого все телесные и плоскостные углы одинаковы. Это требует вместе и одинаковости многоугольников между собою, и чтоб они во всех телесных углах смыкались в равном числе.

Телесные углы, которых плоскостные углы равны и грани одинаковы, могут назваться *правильными*. В них плоскости, разделяющие плоскостные углы пополам, пересекаются в общей линии — *оси* угла, и каждая из них разделяет телесный угол на две одинаковые части, а следовательно, выходя из телесного угла, или сливается с ребром, или разделяет грань пополам. Оси наклонены к ребрам под равными углами.

В правильном теле плоскость, разделяющая один из плоскостных углов пополам, дает в пересечении с поверхностью тела или правильный многоугольник, или такой, где стороны через одну и углы через один равны. В первом случае не трудно видеть, что центр многоугольника будет *центром* правильного тела, то есть такою точкою, которая равноотстоит от вершин телесных углов. Во втором случае, соединяя концы каждых двух смежных сторон линиею, снова получим правильный многоугольник, центр которого будет центром правильного тела.

Пусть число сторон правильного тела n, каждая сторона — правильный многоугольник с m боков, в каждом телесном угле пусть смыкаются многоугольники в числе t.

Описываем из центра правильного тела шар, то каждой стороне будет отвечать при центре правильный телесный угол с m гранями, в котором каждый плоскостной угол $= \frac{400^\circ}{t}$, а следовательно

весь телесный угол $= \frac{1}{2}\left\{m \cdot \frac{400^\circ}{t} - (m-2)\cdot 200^\circ\right\}$. А как такой угол должен быть вместе n-я часть от 400°, то

$$n = \frac{4t}{2m - (m-2)\cdot t}.$$

Числа n, t, m должны быть целые и положительные и притом, как $m \geqslant 3$, так и $t \geqslant 3$. Пусть $m = 3 + p$, где следовательно $p = 0$, или $p > 0$, тогда

$$n = \frac{4t}{6 - t - (t-2)p}.$$

Отсюда видно, что t должно быть менее 6. Если полагаем $m = 6 + q$, то n делается

$$\frac{4t}{12 - 4t - q(t-2)},$$

а как $12 - 4t$ может быть только нулем, или числом отрицательным, а $t - 2$ всегда положительное число, то q должно быть отрицательным, то есть m всегда менее 6.

Итак, все предположения чисел m и t заключаются в следующем:

$m = 3$, $t = 3$, $n = 4$, тело называется *тетраедр* (четыресторонник)
$m = 3$, $t = 4$, $n = 8$, » » *октаедр* (осьмигранник)
$m = 3$, $t = 5$, $n = 20$, » » *икосаедр* (двадцатигранник)
$m = 4$, $t = 3$, $n = 6$, » » *куб* (шестисторонник)
$m = 4$, $t = 4$, знаменатель в n делается отрицательным, следовательно такое тело не возможно.
$m = 5$, $t = 3$, $n = 12$, тело называется *додекаедр* (двенадцатигранник)
$m = 5$, $t = 4$, знаменатель в n отрицательный, следовательно тело не возможно.
$m = 5$, $t = 5$, n также отрицательно и тело не возможно.

Правильные многоугольники, как мы видели, могут быть со всяким числом сторон; напротив, правильных тел возможно только пять [41].

В правильных многоугольниках еще то особенного пред правильными телами, что в них число сторон одинаково с числом углов, в правильных телах этого нет. Пусть r означает число углов в правильном теле, удерживая прежнее означение в прочих буквах, $n \cdot m \cdot \frac{400^\circ}{t}$ будем изображать сумму всех плоскостных углов,

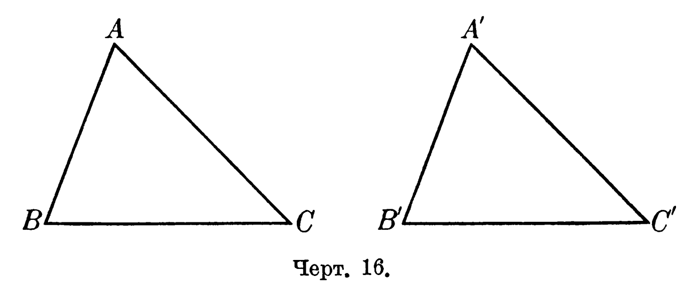
которые произойдут, когда из центра правильного тела проведутся плоскости чрез все бока многоугольников, с другой стороны эта сумма должна давать $r \cdot 400°$, следовательно $r = \frac{nm}{t}$. Итак

в тетраедре углов . . .	4
в кубе	8
в октаедре	6
в додекаедре	20
в икосаедре	12

ГЛАВА V

ОБ ОДИНАКОВОСТИ ТРЕУГОЛЬНИКОВ

Геометрические величины называются *одинаковыми*, когда одну можно взять без различия вместо другой. Уверяются в одинаковости тем, что когда одна поставится в другую, линии и поверхности одной сольются с линиями и поверхностями другой. Если ж две геометрические величины одинаковы по частям только, тогда они *равны* [42]. Иногда равенство некоторых только частей в двух величинах производит уже одинаковость; но надобно, чтоб сии части были той и другой соответственны. Говоря об одинаковости

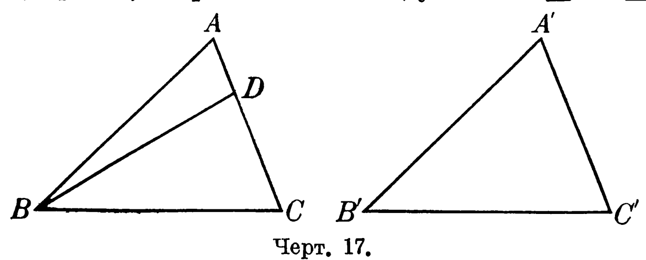


Черт. 16.

треугольников, мы не будем упоминать о соответственности, как о необходимом условии, которое само собою должно подразумеваться; также для краткости вместо того чтоб сказать: сторона, угол одного треугольника равен стороне, углу другого, будем говорить: сторона равна, угол равен.

Два треугольника одинаковы, когда у них сторона и при ней два угла равны. Если в $\triangle ABC$ и $\triangle A'B'C'$ (черт. 16) будет $BC = B'C'$, угол $B = \angle B'$, $\angle C = \angle C'$, то, полагая один на другой стороною BC на $B'C'$, по равенству углов AB должна итти по $A'B'$, AC по $A'C'$ и следовательно сходиться в одной точке.

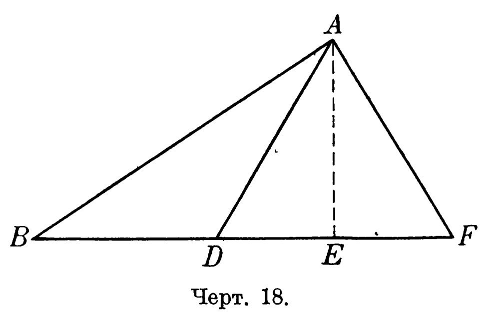
Два треугольника одинаковы, когда у них сторона равна и два угла, из которых один против стороны. Если в треугольнике ABC и $\triangle A'B'C'$ (черт. 17) сторона $BC = B'C'$, угол $C = \angle C'$, $\angle A = \angle A'$,



Черт. 17.

то чтоб они не были одинаковы, надобно, чтоб выходил $\triangle ABD$, когда один положится на другой равною стороною, в котором сумма двух углов BAD и BDA составляла бы 200° [43].

Но если в $\triangle ABD$ (черт. 18) сумма углов B и D равна 200°, то, во первых ни B, ни D не может быть прямой, иначе они были



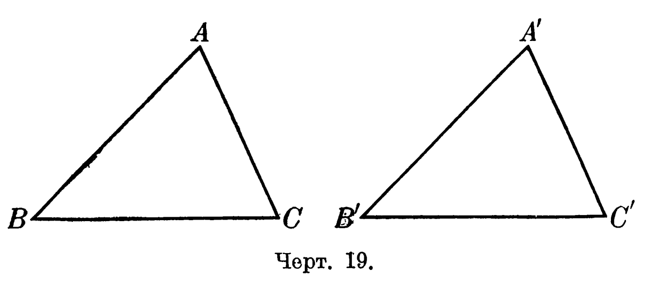
Черт. 18.

бы оба прямые, а стороны AB и AD два перпендикула [к BD]. Если ж B например острый, D следовательно тупой, то перпендикул AE на BD должен падать вне $\triangle ABD$ на стороне BD. Делаем $DE = EF$, ведем AF, то получим два одинаковые треугольника AED и AEF, след. $\angle ADE = \angle AFD$, а как $\angle ADF =$ углу B, то $AB = AF$ и точка E должна быть на средине BF, чего однакож нет.

Здесь в доказательстве упоминается, что перпендикул так падает от одного бока угла на другой, что к нему обращается острый угол. Причина этому та, что, когда два перпендикула не могут сходиться, то еще менее линия не может сходиться с перпендикулом, будучи обращена к нему тупым углом [44].

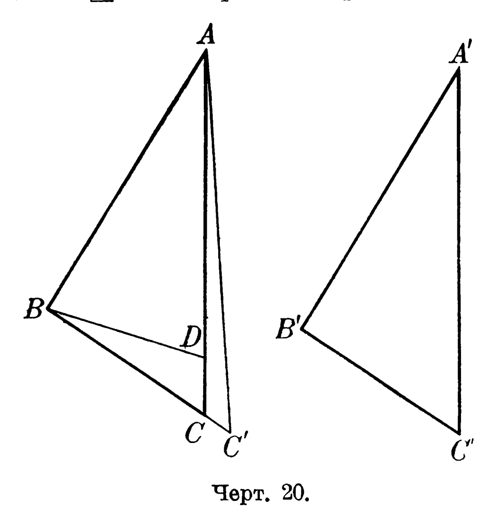
Два треугольника бывают одинаковы, когда у них две стороны и угол между ними равны. Если в $\triangle ABC$ и $\triangle A'B'C'$

сторона $AB = A'B'$, $AC = A'C'$, угол $A = \angle A'$ (черт. 19), то, полагая один на другой одной из равных сторон, например AB на $A'B'$, другая сторона AC должна будет ложиться на $A'C'$ по равенству углов A и A'. Таким образом, один треугольник будет покрывать другой.



Черт. 19.

Два треугольника одинаковы, когда у них две стороны равны и угол против бо̀льшей из равных сторон. В $\triangle ABC$ и $\triangle A'B'C'$ (черт. 20) пусть $AB = A'B'$, $AC = A'C$, $\angle B = \angle B'$ и притом $AC > AB$. Полагаем $\triangle A'B'C'$ на $\triangle ABC$, стороною $A'B'$ на AB, тогда $B'C'$ пойдет по BC, но пусть не кончится в C, а в C'. Выйдет $\triangle ACC'$ равнобедренный, в котором перпендикул на основание CC' будет проходить чрез середину и следовательно углы при основании будут острые, угол же ACB, то есть угол C треугольника ABC, будет тупой. Делаем $AD = BA$ и как $AC > AB$, то точка D должна быть между A и C; следовательно $\triangle ABC$ разделится на $\triangle ABD$ равнобедренный и другой $\triangle BDC$. В $\triangle ABD$ угол ADB острый, а в $\triangle BDC$ углы BDC и BCD тупые.



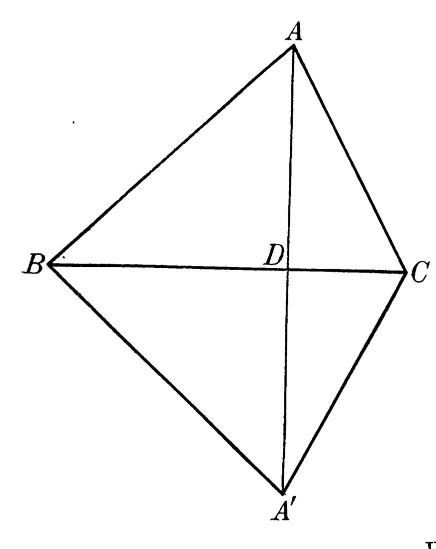
Черт. 20.

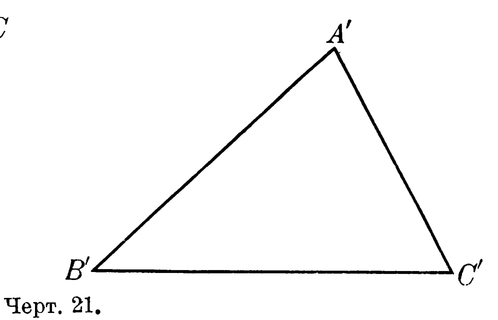
Теперь, если представляем себе перпендикулы в точках D и C, то они должны будут итти внутри $\triangle BDC$, а следовательно и пересекаться.

Если же точка C' треугольника $A'B'C'$ упадет внутри $\triangle ABC$, тогда обратно, перенося треугольник ABC на $\triangle A'B'C'$ сто-

роною AB на $A'B'$, точка C упадет вне $\triangle A'B'C'$, что не должно быть. И так точка C может только падать в C'.

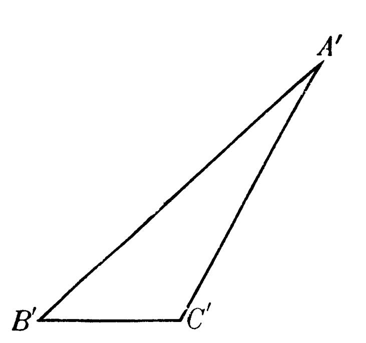
Треугольники одинаковы, когда у них три стороны равны. Пусть $AB = A'B'$, $AC = A'C'$, $BC = B'C'$ (черт. 21) в треугольнике ABC и $\triangle A'B'C'$. Приставляем $\triangle A'B'C'$ к ABC так, чтоб сторона BC была

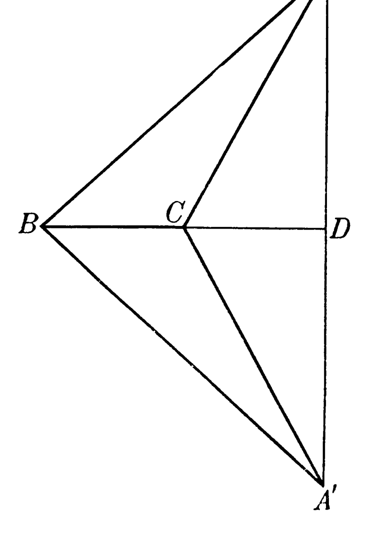




Черт. 21.

общая обоим и чтоб равные стороны сходились в точках B и C. Соединяем A и A' прямою линиею. Произойдут два равнобедренных треугольника ABA' и ACA', в которых $\angle BAA' = \angle BA'A$, $\angle CAA' = \angle CA'A$. Если точка пересечения D линии AA' с BC будет между B и C, то $\angle BAA' + \angle CAA' = \angle A$; $\angle BA'A + \angle CA'A = \angle A'$, а следовательно и





Черт. 22.

$\angle A = \angle A'$. Если же точка D падает вне $\triangle ABC$ и $\triangle A'B'C'$ (черт. 22), то разность углов BAA' и CAA' даст $\angle A$, разность

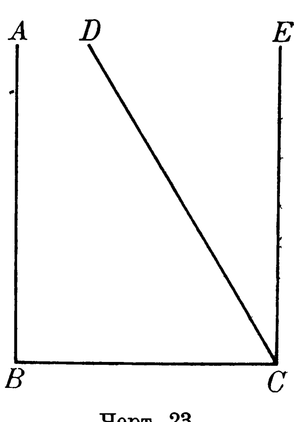
$\angle BA'A$ и $\angle CA'A$ дает угол A', откуда снова следует, что угол $A = \angle A'$. Когда же углы A и A' в $\triangle ABC$ и $\triangle A'B'C'$ равны, то они должны быть одинаковы потому, что у них две стороны равны и угол между сими сторонами.

Из всех сих случаев одинаковости треугольников видно, что части треугольника должны находиться в зависимости друг от друга, и что должен существовать способ определения одних частей треугольника помощию прочих. Даже здесь видно и то, что три части треугольника, как скоро между ними есть по крайней мере одна сторона, определяют три остальные. Примечание сие важно потому, что определение неизвестных частей треугольников составляет предмет Тригонометрии, и здесь следовательно можем уже назначить наперед, что задачи Тригонометрии должны состоять в том, чтоб находить величину трех частей треугольника, когда другие три даны. После будет видно, что треугольники не всегда бывают одинаковы, когда у них только углы равны, следовательно и Тригонометрия не может дать способа для определения сторон треугольника, когда только его углы известны. Некоторые Математики невозможность определения линий помощию углов хотели принять за основание геометрии, но такое основание недостаточно, потому что разнородные количие могут быть в зависимости друг от друга [45].

ГЛАВА VI

О ИЗМЕРЕНИИ ПРЯМОУГОЛЬНИКОВ

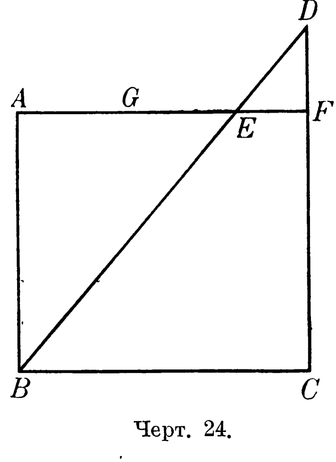
Измерение плоскостей основывается на том, что две линии сходятся [46], когда они стоят на третьей по одну сторону и когда одна перпендикул, а другая наклонена под острым углом, обращенным к перпендикулу. Линии AB и CD (черт. 23) должны сходиться по достаточном продолжении, если одна из них AB перпендикулярна к BC, а другая CD наклонена к BC под острым углом C, обращенным к перпендикулу AB. Строгого доказательства сей истины до сих пор не могли сыскать. Какие были даны могут назваться только пояснениями, но не заслуживают быть почтены в полном смысле Математическими доказательствами [47]. Лучшее из них следующее:



Черт. 23.

Восставляем перпендикул CE, пусть $\angle DCE = \frac{400^\circ}{n}$, где n целое число. Кладем n таких углов, как DCE, один возле другого вершинами вместе: произойдет круг, которого плоскость может распространяться во все стороны беспредельно. Между тем когда возьмется линия в n раз более BC и на концах такой линии восставятся перпендикулы, то плоскость между перпендикулами может распространяться только в одну сторону. Отсюда видно, что плоскость между линиями DC и CE увеличивается гораздо более от продолжения линий DC и CE, нежели плоскость между AB и CE от продолжения линий AB и CE, и что наконец первая должна превзойти вторую. Тогда она не будет помещаться более между AB

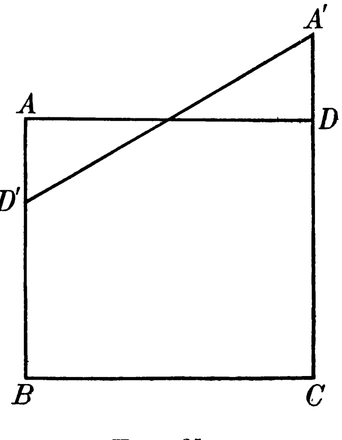
и CE, что не иначе может произойти, как когда CD пересечет AB. Когда угол DCE дробная часть от 400°, то приближаем DC к CE, покуда составится угол в $\frac{200^\circ}{n}$ и где n целое число. Линия DC в ее новом положении должна будет сходиться с AB, тем более, следовательно, всякая другая линия CD, далее отклоненная от CE [48].



Черт. 24.

Отсюда следует во первых то, что когда одна линия перпендикулярна к другой, эта к третьей, третья к четвертой и когда все четыре линии лежат в одной плоскости, а прямые углы по одну сторону линий, то первая будет перпендикулярна к четвертой, так что составится четыреугольник с прямыми углами, который посему и называется *прямоугольник* [49].

Пусть GA перпендикулярна к AB, AB к BC, BC к CD (черт. 24), то всякая линия BD, проведенная в угле B, должна пересекать как AG, так и CD [50]. Положим, что BD пересекает прежде AG в точке E, потом CD в точке D, тогда продолжение AE вступит в $\triangle BDC$ и не может встретиться ни с BC, ни с BD, необходимо пересечет CD в какой нибудь точке F. То же выйдет, когда BD пересекает прежде CD, потом AG. Другое предположение, то есть, что BD сходится вместе с AG и CD, значило бы уже само по себе, что CD и AG пересекаются. Угол при точке F не может быть острый внутри четвероугольника: иначе CF и BA сходились бы на стороне BC [51], не может быть также тупой: иначе угол DFA будет острый и AB с CD будет сходиться на другой стороне, что не должно быть, потому что AB и CD перпендикулярны к BC.



Черт. 25.

В прямоугольниках противоположные стороны равны. Если предположим в прямоугольнике $ABCD$ (черт. 25) сторону AB

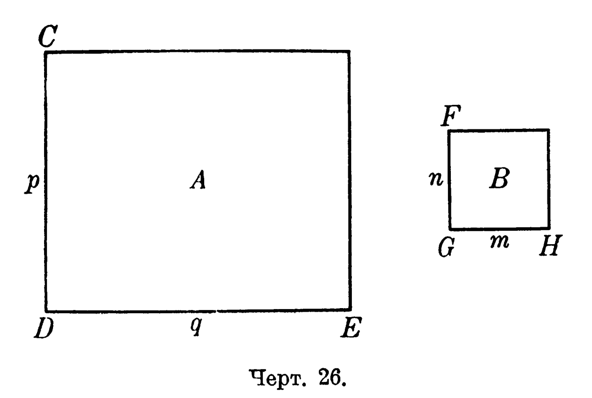
более CD, то, покрывая четыреугольник $ABCD$ им самим так, чтоб CD ложилась на AB, а AB на CD, тогда точка D должна будет упасть между точек A и B, где нибудь в D'; напротив точка A вне четвероугольника $ABCD$, где нибудь в A', следовательно AD и $A'D'$ пересекутся и дадут два перпендикула на линии из одной точки.

Два прямоугольника одинаковы, когда у них стороны равны. Доказательство этому сделать весьма легко наложением одного прямоугольника на другой.

Когда бок прямоугольника разделится на равные части, в точках деления восставятся перпендикулы к боку, которые проведутся чрез весь прямоугольник, то прямоугольник разделится на одинаковые между собою прямоугольники. Ясно, что перпендикулы должны отрезывать прямоугольники; ясно и то, что первый со вторым имеют два равные бока, так и второй с третьим, третий с четвертым и так далее до последнего.

Отсюда непосредственно следует, что когда два бока смежные в прямоугольнике разделятся один на n равных частей, другой на m равных частей и от точек деления проведутся чрез прямоугольник перпендикулы к бокам, то прямоугольник разделится на одинаковые прямоугольники, число которых будет произведение чисел n и m.

Пусть в двух прямоугольниках A и B смежные бока CD, DE (черт. 26) одного содержатся к смежным бокам FG и GH другого, как числа p к n, q к m, то, разделяя CD на p равных частей: таких частей в FG будет заключаться n. Разделяем DE на q



Черт. 26.

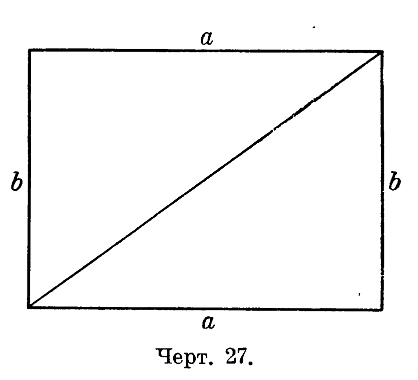
равных частей, то таких частей в GH будет m. Прямоугольник A разделится на pq таких прямоугольников, которых в B будет nm, следовательно содержание прямоугольника A к B равно содержанию $\frac{pq}{nm}$ [52].

Прямоугольник с равными боками называется *квадратом*. Для измерения плоскостей за единицу берется квадрат, которого бока линейная единица. И так величина прямоугольника есть произведение двух перпендикулярных боков, которые также называют *высотою* и *основанием*.

ГЛАВА VII

ОБ ИЗМЕРЕНИИ ТРЕУГОЛЬНИКОВ И ДРУГИХ ФИГУР

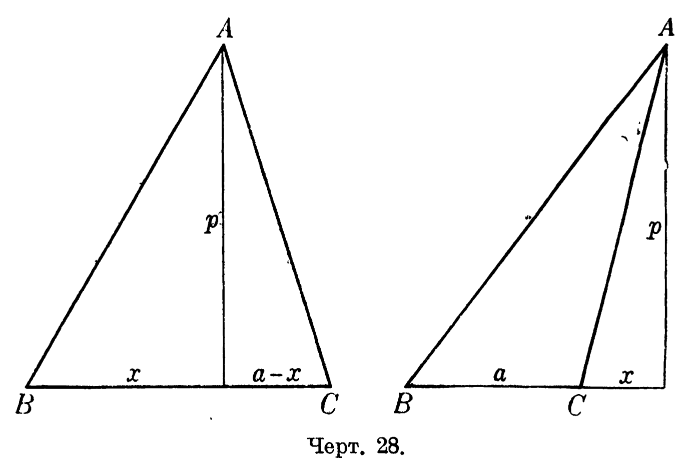
Берем прямоугольник, которого a и b два перпендикулярные бока (черт. 27), ведем линию внутри его чрез вершины двух противоположных углов, такую линию называют *диагоналом*, как в прямоугольнике, так и во всяком четыреугольнике; сим образом произойдут два прямоугольные треугольника, которых катеты линии a и b, а гипотенуза диагонал, и которые будут одинаковы, потому что у них три стороны равны. Каждый треугольник следовательно половина прямоугольника. В предъидущем уроке [53] видели, что площадь прямоугольника равна произведению двух перпендикулярных боков, посему площади прямоугольных треугольников, которые производит диагонал в прямоугольнике, каждая $= \frac{1}{2} ab$, а как все прямоугольные треугольники, которых катеты a и b, одинаковы между собою, то отсюда и следует, что площадь всякого прямоугольного треугольника равна половине произведения двух катетов.



Черт. 27.

Пусть теперь $\triangle ABC$ (черт. 28) будет не прямоугольный. Из вершины которого нибудь угла, например A, опускаем перпендикул на противоположную сторону a. Как угол C предполагается не прямой, то перпендикул p не может падать в точку C; но по ту, или другую сторону. И так надобно здесь различать два случая: или p внутри треугольника ABC, или вне. В первом случае p разделяет a на две части: x одну, $a - x$ другую, а $\triangle ABC$ разделится на два прямоугольных треугольника, так что p и x будут катеты

одного, p и $a-x$ катеты другого. Площадь одного $=\frac{1}{2}px$, площадь другого $=\frac{1}{2}p(a-x)$, следовательно того и другого вместе дадут площадь $\triangle ABC=\frac{1}{2}pa$. Во втором случае также происходят два прямоугольных треугольника: одного катеты p и x, называя x ближайшее расстояние p от угла C, другого катеты p и $a+x$, то есть перпендикул и дальнейшее расстояние p от угла B. Площадь тре-



Черт. 28.

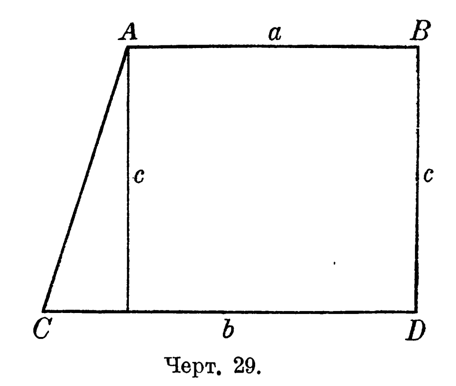
угольника ABC будет разность площади большего прямоугольного треугольника без меньшего; но площадь первого $=\frac{1}{2}p(x+a)$, площадь второго $=\frac{1}{2}px$, следовательно площадь $\triangle ABC=\frac{1}{2}pa$, то же, что и в первом случае.

Перпендикул p называют *высотою* треугольника, а сторону a, к которой p перпендикулярна, — *основанием*. Распространяя это название и на прямоугольные треугольники, надобно один из катетов, который нибудь, называть высотою треугольника, другой основанием, и тогда площадь всякого треугольника, как прямоугольного, так и непрямоугольного, будет равна половине произведения основания на высоту.

Многоугольники могут всегда быть разделены на треугольники, и таким образом их площади быть измерены. Для сего требуется знать высоту и основание всех треугольников, происшедших от разделения. Если многоугольник дан в его сторонах и углах, выраженных числами, тогда всего лучше находить вычислением высоты и основания треугольников, которые его составляют, что требует уже помощи Алгебры [[54]]. Если ж многоугольник дан в чертеже, то вместо того, чтоб мерить высоту и основание каждого

треугольника порознь, удобнее сперва превращать многоугольник в один треугольник. Это делается так, что каждый отделенный треугольник линиею, проходящею чрез концы двух смежных сторон, заменяется другим равным, который бы в присоединении к остальной части многоугольника уменьшал число его сторон на одну. Для сего надобно, чтоб вновь присоединенный треугольник удержал основание и высоту отделенного, чтоб одна его сторона была общею с многоугольником, и чтоб которая нибудь из двух прочих сторон составляла прямую линию со смежною стороною многоугольника [55]. Все это должно быть моим слушателям давно известно, почему и оставляю дальнейшие подробности.

О прямой трапеции и параллелограммах скажем однакож особо. *Прямою трапециею* называется четыреугольник, у которого три стороны только друг к другу перпендикулярны. В четыреугольнике $ABDC$ (черт. 29), если три стороны a, b, c друг к другу перпендикулярны [56], но AC не перпендикулярна к BA, а следовательно и к CD, то перпендикул из точки A на противоположную сторону CD должен быть равен с c и отрезать на CD к стороне c линию, ровную с a, что и предполагает уже неравенство сторон b и a. Пусть $b > a$, то перпендикул c из A на b пойдет внутри трапеции и отрежет по одну сторону прямоугольник, которого площадь $= ac$, по другую сторону прямоугольный треугольник, которого катеты c и $b - a$, площадь $= \frac{1}{2} c(b - a)$. Обе площади вместе дают $\frac{1}{2} c(a + b)$, то есть площадь прямой трапеции равна половине произведения среднего перпендикула на сумму двух крайних.



Черт. 29.

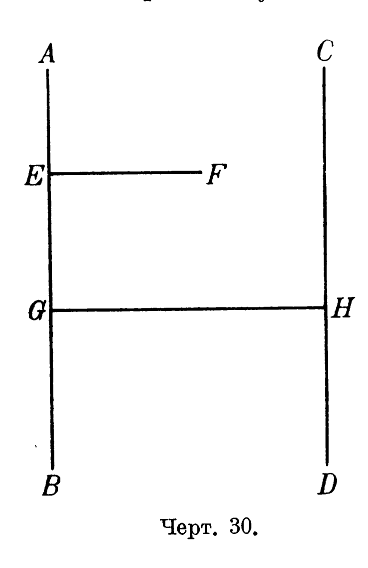
Параллелограмм называется четыреугольник, составленный из двух одинаковых треугольников, соединенных так, что их равные стороны противоположны. Основание параллелограмма называется одна из его сторон, высота треугольника при том же основании называется высотою основания, следовательно площадь параллелограмма равна произведению высоты на основание [57].

ГЛАВА VIII

О ПАРАЛЛЕЛОГРАММАХ

Две линии называются *параллельными,* когда они в одной плоскости и когда не могут пересекаться, сколько бы ни были продолжаемы.

Если из точки на линии опустится перпендикул на параллельную с ней, то он будет вместе перпендикулом и для другой. Иначе перпендикул к одной делал бы с другою по ту или другую сторону острый [угол], и следовательно предположенные параллельные линии должны бы сходиться по ту или другую сторону. Отсюда следует, что чрез данную точку к данной линии можно проводить одну только параллельную [58] и что она будет проведена, когда сделается перпендикулярна к перпендикулу на данную линию из данной точки.

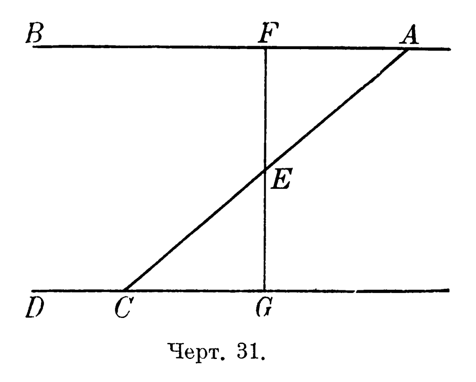


Черт. 30.

Перпендикул к одной из двух параллельных линий, будучи продолжен по ту или другую сторону, встретит другую параллельную и будет следовательно к ней также перпендикулом. Если AB параллельна с CD, EF перпендикулярна к AB (черт. 30), то из какой нибудь точки H линии CD опускаем перпендикул GH на AB. Произойдут четыре линии: CH, GH, GE, EF, перпендикулярные одна к другой, посему последняя EF должна сходиться под прямым углом с первою CH. Когда HG и EF на противных сторонах линии AB, то продолжение EF по другую сторону должно

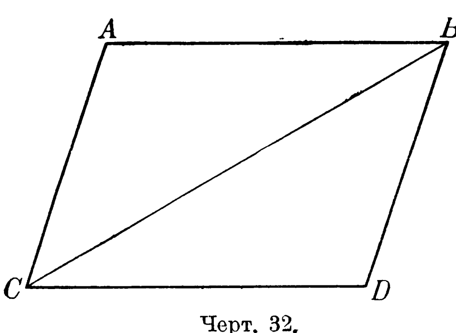
встречать CD, как это и было сказано. Наконец, если точка G случилась бы в E, тогда перпендикулы EF и GH составляли бы одну линию.'

Две параллельные линии, пересекаясь третиею, дают сумму двух углов на одной стороне третией, обращенных друг к другу, равную двум прямым. Пусть AB и CD — две параллельные линии, AC пересекает их (черт. 31). Делим AC в E пополам, опускаем из E перпендикул на AB, продолжаем его и в другую сторону покуда пересечет DC. Такой перпендикул пусть представляет линия FEG. Выходят два треугольника AEF и CEG одинаковых, потому что у них два угла и одна сторона равны. Остальные два угла BAE и GCE также равны, следовательно, $\angle BAC + \angle DCA = 200°$.



Черт. 31.

Обратно, если предположим, что $\angle BAC + \angle DCA = 200°$ и только EF перпендикулярна к AB, то в $\triangle AEF$ и $\triangle GEC$ снова найдутся два угла, равных при стороне, следовательно и третий третьему, то есть EG перпендикулярна на GC, а две линии AB и CD параллельны. Когда сумма углов $BAC + DCA = 200°$, то углы на крест линии AC с AB и CD равны [59].



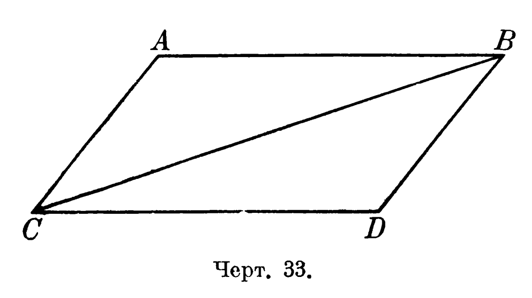
Черт. 32.

Параллелограмм, следуя определению, состоит из двух одинаковых треугольников, посему диагонал в параллелограмме делает с противоположными сторонами равные углы на крест, а следовательно противоположные стороны параллелограмма параллельны. В параллелограмме $ABCD$ (черт. 32) два треугольника, его составляющие, ABC, BCD одинаковы, $\angle ABC = \angle BCD$, следовательно AB параллельна с CD. По той же причине и AC параллельна с BD. Отсюда видно, что свойство параллелограммов заключается в том,

5 Зак. 754. Н. И. Лобачевский

что 1-ое противоположные стороны равны, 2-ое противоположные углы равны и 3-ие противоположные стороны параллельны.

Полагаем в четыреугольнике $ABCD$ противоположные стороны равными (черт. 33). Ведем диагонал BC, то выдут два одинаковые треугольника, потому что у них три стороны равны, а следовательно четыреугольник $ABCD$ параллелограмм.

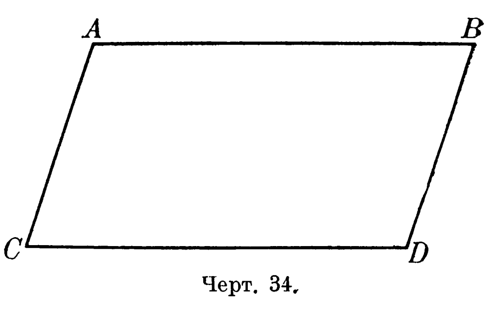


Черт. 33.

Четыреугольник, у которого две только противоположные стороны равны и параллельны, будет уже параллелограмм. Пусть в $ABCD$ сторона $AB = CD$ и вместе AB с CD параллельны, то угол $ABC = \angle BCD$, $\triangle ABC$ одинаков с $\triangle BCD$, следовательно $ABCD$ параллелограмм.

Если в четыреугольнике противоположные стороны параллельны, то четыреугольник будет параллелограмм. Если AB параллельна с CD, AC с BD, то угол $ABC = \angle BCD$, $\angle ACB = \angle CBD$, $\triangle ABC$ одинаков с треугольником BCD, посему $ABCD$ параллелограмм.

Если в четыреугольнике противоположные углы равны, то он будет параллелограмм (черт. 34). Если в четыреугольнике $ABCD$ угол $A = \angle D$, $\angle B = \angle C$, то $ABCD$ — параллелограмм. Можно доказать, что сумма углов во всяком четыреугольнике $= 400°$, следовательно в $ABCD$ сумма $\angle A + \angle C = \angle B + \angle D = 200°$, то есть линии AB и CD параллельны.

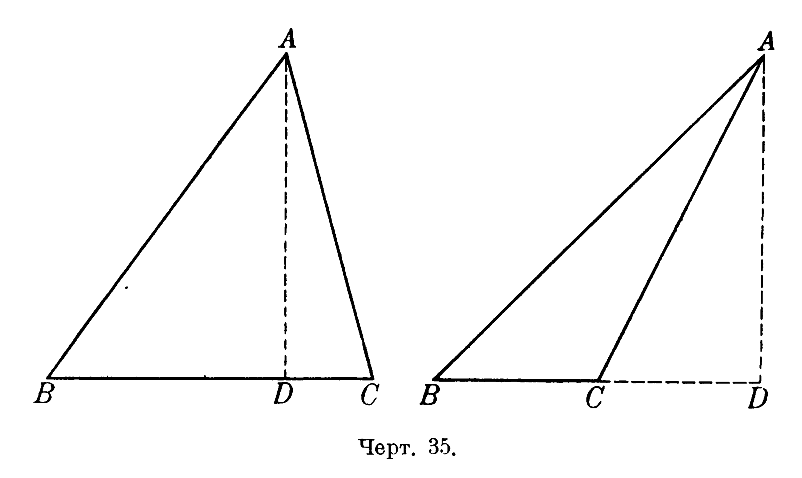


Черт. 34.

Также можно доказать, что $\angle A + \angle B = 200°$, и следовательно AC параллельна с BD.

Чтоб доказать, что в каждом четыреугольнике сумма углов $= 400°$, надобно начать доказывать, что в каждом треугольнике сумма углов $= 200°$. В прямоугольнике каждый угол прямой, следовательно сумма всех $= 400°$. В прямоугольном треугольнике, так как их два составляют прямоугольник, сумма углов $= 200°$. Мы видели, что

всякий треугольник может быть составлен из суммы двух прямоугольных, или разности. В треугольнике ABC (черт. 35), когда перпендикул AD на BC проходит чрез середину [60], $\angle B + \angle BAD = 100°$,



Черт. 35.

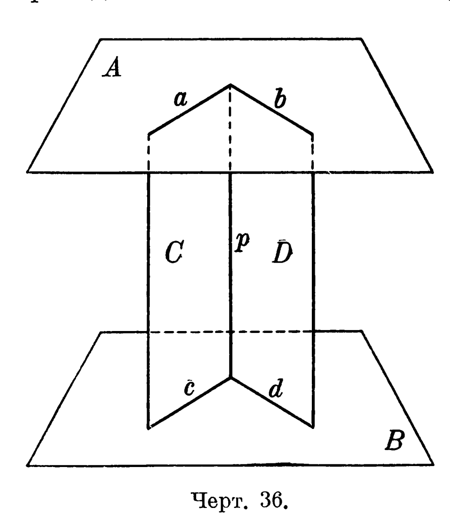
$\angle C + \angle CAD = 100°$, следовательно все три угла $\triangle ABC = 200°$. В треугольнике ABC, когда перпендикул AD на сторону BC [лежит] вне треугольника, то угол $B + \angle BAD = 100°$, $\angle ACD + \angle CAD = 100°$, отсюда $\angle B + \angle BAC = ACD$, то есть $\angle A + \angle B + \angle ACB = 200°$ [61].

ГЛАВА IX

ОБ ИЗМЕРЕНИИ ПРИЗМ

Две плоскости называются *параллельными*, когда они не могут сходиться, сколько бы ни были продолжаемы. Из сего определения следует, что плоскость, пересекая две параллельные, дает в пересечении две параллельные линии.

Представляем две плоскости A и B параллельные (черт. 36). Берем на одной из них две сходящиеся линии a и b, через них проводим две плоскости C и D, перпендикулярные к B. Произойдут три линии: p — линия пересечения C с D, перпендикулярных к B, линия c от пересечения C с B и линия d от пересечения D с B. Линии a и c параллельны, линии b и d также, p перпендикулярна [к] c и d, следовательно перпендикулярна к a и b [62], следовательно p перпендикул к плоскости A. И так перпендикул к одной из двух параллельных плоскостей [будет] вместе перпендикулом и к другой.



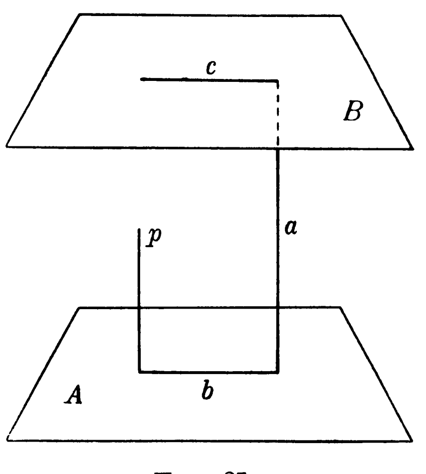
Черт. 36.

Отсюда виден способ проводить чрез данную точку параллельную плоскость к данной. Именно, надобно опускать перпендикул из данной точки на данную плоскость, а потом к сему перпендикулу проводить перпендикулярную плоскость чрез данную точку. Из определения параллельных плоскостей видно так же и то, что чрез данную точку к данной плоскости может проходить только

одна параллельная, иначе пересечение всех их новою плоскостию давало бы две линии чрез одну точку, параллельные одной линии.

Перпендикул на плоскости, будучи продолжен в ту и другую сторону, должен встречать параллельную плоскость, а следовательно и к ней быть перпендикулом.

Воображаем плоскость A, другую B, ей параллельную (черт. 37). Пусть линия p перпендикулярна к A. Берем произвольно точку на плоскости B и опускаем из нее перпендикул a к плоскости A, потом чрез a и p проводим плоскость, которой пересечение с A даст линию b, а пересечение с B линию c. Так произойдут четыре линии c, a, b, p в одной плоскости и перпендикулярные по порядку одна к другой, следовательно первая c должна сходиться с последнею p [63].



Черт. 37.

Величина перпендикулов между параллельными плоскостями везде равна, потому что два перпендикула с линиями, проведенными между ними в плоскостях, составляют прямоугольник.

Тело, ограниченное плоскостями, пересекающимися в параллельных линиях, и двумя параллельными плоскостями, пересекающими все первые, называется *призмою* [64]. Две фигуры, которых плоскости параллельны и пересекают все прочие, будут *основания* призмы, перпендикул между двумя основаниями — *высота*, а параллельные линии, соединяющие основания, — *ребра*.

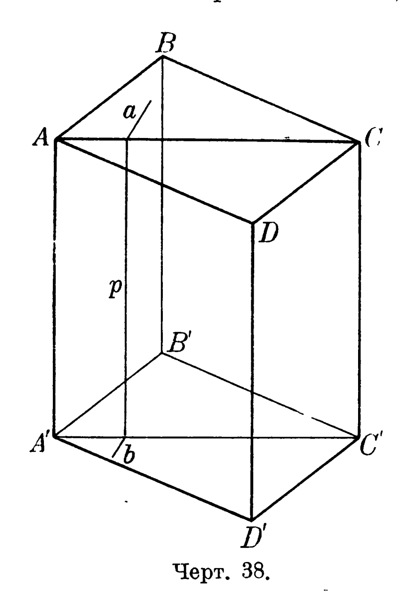
Все фигуры, ограничивающие призму, за исключением оснований, четыреугольники с параллельными противоположными сторонами, а следовательно параллелограммы. Они называются *боками* призмы. Число боков одинаково с числом сторон основания. По числу боков призмы бывают трехсторонние, четыресторонние и т. д.

В трехсторонней призме основания одинаковы, потому что в двух треугольниках, которые служат основаниями призмы, три стороны равны. Всякая призма разделится на трехсторонние

плоскостями, проходящими чрез два ребра двух смежных боков, а следовательно во всякой призме основания одинаковы.

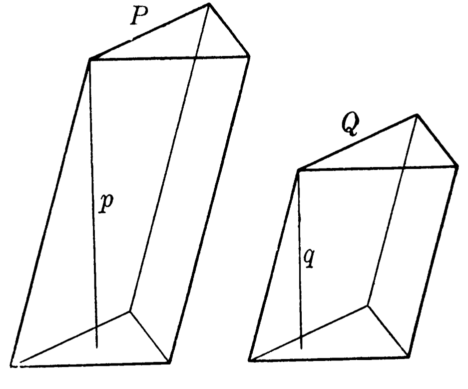
Две трехсторонние призмы одинаковы, когда у них одинаковы основания, один из боков, угол сего бока с основанием и высоты. Доказательство само собою видно [65].

Отсюда следует, что когда основание призмы параллелограмм, то плоскость чрез соответственные диагоналы оснований разделяет призму на две трехсторонние одинаковые [66]. В призме P (черт. 38), если основания $ABCD$, $A'B'C'D'$ параллелограммы, то плоскость $ACC'A'$, проходящая чрез два соответственные диагонала AC и $A'C'$, разделяет призму P на две, у которых основания одинаковы. Далее, если опустим перпендикул p от AC на $A'C'$ и ведем a от конца p перпендикулярно к AC в плоскости $ABCD$, воображаем плоскость чрез p и a, то получится линия пересечения b, перпендикулярная к $A'C'$ и параллельная с a, следовательно угол плоскости ABC с плоскостью $ACC'A'$ равен углу плоскости $A'C'D'$ с плоскостью $ACC'A'$, да [так] как параллелограмм $ACC'A'$ общий у двух призм, на которые разделена P, высота у них общая также, то они одинаковы [67].



Черт. 38.

Две трехсторонние призмы, у которых основания одинаковы, один из боков одинаков и угол наклонения сего бока к основанию, но высоты различны, содержатся, как их высоты [68]. Если в двух призмах P и Q (черт. 39) основания одинаковы, но высоты содержатся как числа p и q, то разделяем высоту первой на p частей, второй на q частей: те и другие части будут



Черт. 39.

равны. Чрез точки деления проводим плоскости, перпендикулярные на высоте, то призма P разделится на p одинаковых между собою призм и одинаковых с q призмами, на которые разделится призма Q плоскостями, перпендикулярными к ее высоте в точках деления, следовательно содержание величины призмы P к величине призмы Q будет такое же, как и содержание высот p и q.

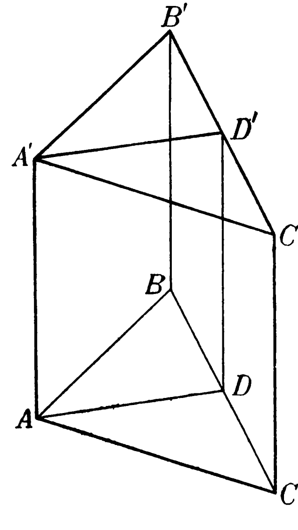
Когда ребра призмы перпендикулярны к основаниям, то призма называется *прямою*. Две прямые призмы, у которых высоты равны, а основания прямоугольники, содержатся, как основания. Пусть даны две прямые призмы A и B, основание одной — прямоугольник с боками p и q, другой — прямоугольник с боками n и m, то разделяя бока p, q, n, m, соответственно на p, q, n, m частей, в точках деления восставляя перпендикулы, а через перпендикулы плоскости, перпендикулярные к основанию, то призма A разделится на pq призм, призма B на nm призм, одинаковых между собою, следовательно призмы A и B содержатся, как основания.

Для измерения тел принимается за единицу куб [69], которого ребра линейные единицы. Сравнивая с таким кубом прямую призму P, которой высота единица, а основание прямоугольник A, разумея под A величину площади прямоугольника, видим, что величина призмы P будет A. Сравнивая с призмою P другую призму Q, которой основание то же, но высота p, видим, что величина [призмы] Q равна произведению величины призмы P на высоту p, следовательно равна pA, то есть, произведению высоты на основание. И так прямая призма, которой основание прямоугольник, равна произведению высоты на основание.

В прямой призме, которой основание прямоугольник, плоскости чрез соответственные диагоналы оснований производят две одинаковых призмы, которых основания прямоугольные треугольники и могут иметь катетами всякие две произвольные линии, то отсюда следует, что величина прямой призмы, которой основание прямоугольный треугольник, равна произведению основания на высоту.

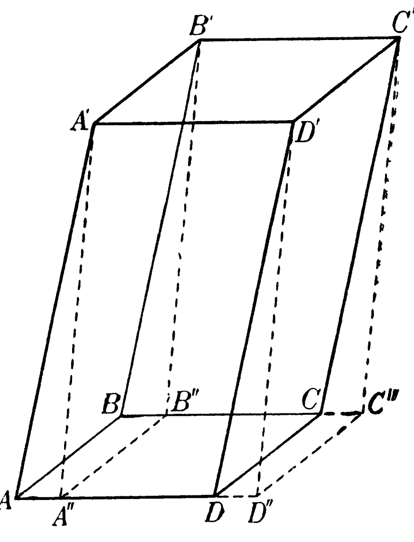
В трехсторонней прямой призме P (черт. 40), какой бы треугольник ABC и $A'B'C'$ не был основанием, всегда должна найтись такая сторона BC, при которой оба угла будут острые. Опускаем из противолежащего угла A перпендикул AD на BC и

проводим плоскость чрез AD и AA'. Такая плоскость пересечет бок $B'C'BC$ в линии DD', перпендикулярной к основанию ABC, следовательно она разделит призму P на две прямых призмы, которых основания будут прямоугольные треугольники ABD и ACD. Пусть p высота призмы P, M площадь треугольника ABD, N площадь треугольника ADC, то величины двух призм, составляющих P, будут pM и pN, а величина обеих $p(M+N)$, то есть величина трехсторонней призмы равна произведению основания на высоту.



Черт. 40.

В [наклонной] призме AC' полагаем основания $ABCD$, $A'B'C'D'$ параллелограммами (черт. 41). Опускаем из A' и D' перпендикулы на AD, из B', C' на BC. Один из перпендикулов, например $A'A''$, должен лежать на призме [·0]; тогда и $B'B''$ также, а прочие два $C'C''$, $D'D''$ вне призмы. Соединяем точки A'' и B'', точки C'' и D'' линиями. Если $B'B''$ предположится линиею пересечения плоскости чрез $A'B'$ и $A'A''$, то $B'B''$ будет перпендикулярна к BC; но как двух перпендикулов из B' на BC не может быть, то все равно предполагать ли $B'B''$ линиею пересечения плоскости чрез $A'B'$ и $A'A''$, или прямо опущенным перпендикулом на BC. Итак точки A', B', A'', B'' лежат в одной плоскости, тоже и точки C', D', C'', D''.

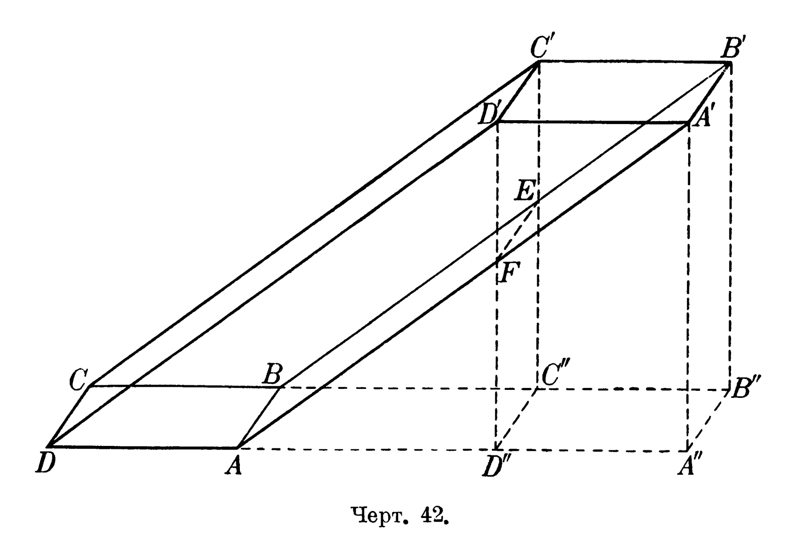


Черт. 41.

Призмы, из которых одна отрезывается плоскостию $A'A''B''B'$, другая присоединяется плоскостию $D'D''C''C'$, одинаковы между собою, потому что у них основания $ABB'A'$ и $DCC'D'$ одинаковы, $\triangle AA''A'$ одинаков с $\triangle DD''D'$ и углы сих боков с основаниями. И так

призма между параллелограммов $ABCD$ и $A'B'C'D'$ равна призме между оснований $A''B''C''D''$ и $A'B'C'D'$.

Может случиться (черт. 42), что обе точки A'', D'', так же как и B'', C'', будут вне призмы; тогда остается доказательство



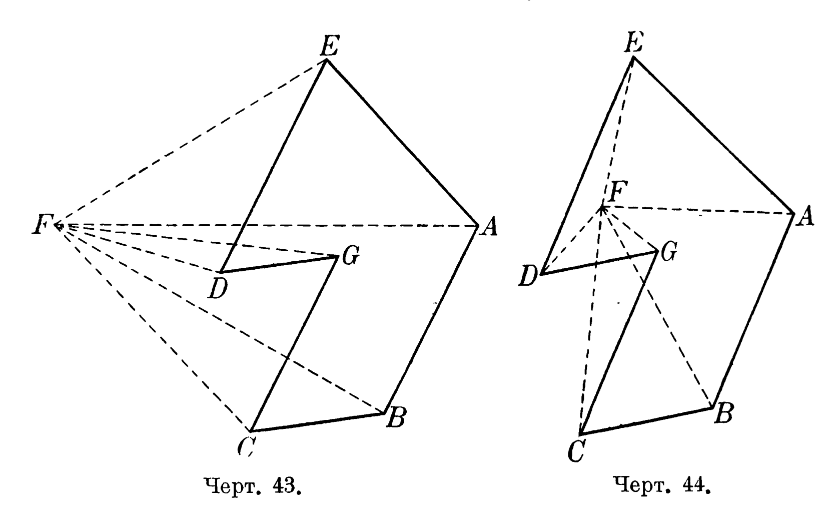
Черт. 42.

также для одинаковости призм $ABB''A''A'B'B$ и $DCC''D''D'C'C$, от которых, отнимая их общую часть призму $ABC''D''FEB$, получим такие два равные тела, которые в соединении с призмою $A'D'FEC'B'$ дают две равных призмы: одну между оснований $ABCD$ и $A'B'C'D'$, другую между $A''B''C''D''$ и $A'B'C'D'$, как и в первом случае. Из всего этого следует, что величина двух призм равна, если основания одинаковые параллелограммы и заключаются между двух параллельных плоскостей и если которые нибудь противоположные бока также заключаются в двух параллельных плоскостях. Посему, принимая в рассуждение одну величину, если бока призмы, которой основания параллелограммы, не перпендикулярны к основаниям, можно заменять противоположные бока другими, перпендикулярными к основаниям, лишь бы высота оставалась та же, и следовательно всякая призма, которой основание параллелограмм, равна прямой с таким же основанием и с тою же высотою.

Как было доказано, что призма, которой основание параллелограмм, разделяется на две трехсторонние одинаковые плоскостию, проходящею чрез диагоналы оснований, и как стороны параллелограмма и диагонал могут быть взяты совершенно произвольно,

то отсюда следует, что всякая трехсторонняя призма равна по величине с другой, которой основание и высота те же. Прямая же трехсторонняя призма равна произведению высоты на основание, посему и всякая трехсторонняя призма равна произведению высоты на основание.

Призма, которой основание многоугольник, может быть разделена на трехсторонние призмы. Для сего надобно только основание разделить на треугольники, потом другое основание разделять на соответственные одинаковые треугольники, и проводить плоскости чрез линии деления. Разделять многоугольники на треугольники дан уже был способ [71], но здесь скажем еще о другом, который заключает все прочие. Чтоб многоугольник *ABCGDE* разделить на треугольники, надобно взять в плоскости многоугольника внутри, вне его или на окружности его [72] точку *F*, потом из точки *F* вести во все углы линии *a*, *b*, *c*, *g*, *d*, *e*. Таким образом произойдут треугольники из сторон многоугольников и линий, проведенных к *F*, числом сколько сторон многоугольника *ABCGDE*. Начиная с того из треугольников, который весь



Черт. 43. Черт. 44.

или частию лежит на плоскости многоугольника, должно присоединять по порядку следующие, покуда в них углы при *F* будут прикладываться, и вычитать всякий раз треугольник, как скоро угол при *F* отнимается, что продолжать до тех пор, пока переберутся все треугольники. Такое соединение треугольников дает площадь многоугольника. Например (черт. 43), когда точка *F* вне

многоугольника $ABCGDE$, то площадь многоугольника $ABCGDE = \triangle AFE + \triangle AFB + \triangle BFC - \triangle CFG + \triangle GFD - \triangle DFE$. Площадь многоугольника $ABCGDE$, когда F взято внутри его (черт. 44), равна $\triangle AFB + \triangle BFC - \triangle CFG + \triangle GFD + \triangle DFE + \triangle EFA$.

Пусть теперь, говоря вообще, площадь O основания призмы P происходит из соединения треугольников A, B, C, D и т. д. так, что $O = A + B + C + D +$ и т. д., где некоторые из треугольников должны рассматриваться отрицательными в соединении их для составления площади O. Воображаем плоскости чрез точку F, из которой проведены линии, разделяющие основание O на треугольники, и чрез ребра призмы, то все такие плоскости пересекутся в одной линии, проходящей чрез F, и разделят призму P на трехсторонние призмы A', B', C', D' и т. д., которых основания соответственно будут A, B, C, D и т. д., а принимая те из них отрицательными, которых основания входят со знаком минус в сумме $A + B + C +$ и т. д., ясно, что и призма $P = A' + B' + C' + D'$ и т. д. Называем p высоту призмы P, она будет вместе высотою и трехсторонних призм A', B', C', D', и т. д., следовательно $A' = pA$, $B' = pB$, $C' = pC$, $D' = pD$, а величина призмы $P = p\,\{A + B + C + D +$ и т. д.$\} = p \cdot O$, то есть произведение высоты на основание.

ГЛАВА X

ИЗМЕРЕНИЕ ПИРАМИД И ВСЕХ ТЕЛ, ОГРАНИЧЕННЫХ ПЛОСКОСТЯМИ

Пирамида есть тело, которого одна из ограничивающих плоскостей может быть треугольник или многоугольник и называется *основанием*, прочие плоскости — треугольники, выходящие из одной точки, *вершины пирамиды* [73].

Перпендикул, опущенный из вершины пирамиды на основание, называется — *высотою*. Треугольники, соединяющие вершину с основанием — *боками*; их линии соединения — *ребрами*.

Пирамида, в которой одно ребро перпендикулярно к основанию и следовательно служит высотою, будет *прямая* [74].

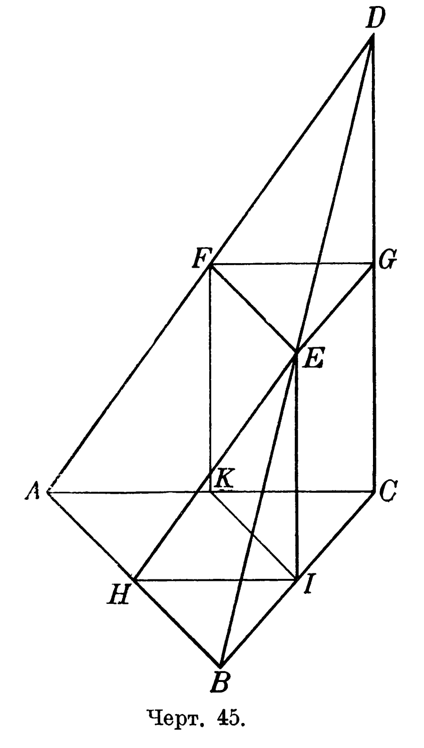
По числу боков пирамида бывает трехсторонняя, четырехсторонняя и так далее.

Если чрез высоту пирамиды и ребро проведутся плоскости, то основание пирамиды разделится на треугольники, и самая пирамида на трехсторонние прямые пирамиды, из которых данная пирамида составляется чрез такое же соединение, чрез какое соединение составляется ее основание из треугольников, здесь происшедших. Отсюда видно, что для измерения пирамид требуется только знать величину всякой трехсторонней пирамиды [75].

В прямой трехсторонней пирамиде P высоту $DC = p$ разделяем пополам в точке G (черт. 45); ведем перпендикулярно плоскость к высоте DC; она произведет точки пересечения F и E с другими двумя ребрами AF, BE; от чего произойдет треугольник FEG и трехсторонняя прямая пирамида $DFGE$. Чрез сторону FE проводим плоскость, перпендикулярную к основанию ABC пирамиды P: произойдут точки пересечения K и I со сторонами AC и BC, [и] ли-

нии FK, EI, KI. Сии последние три линии с линиями FE, FG, EG, KC, IC образуют призму, которой основание треугольник KCI, высота линия GC, равная $\frac{1}{2}p$, следовательно величина ее$=\frac{1}{2}\triangle KCI \cdot p$.

На основании ABC чрез точку I ведем линию IH к стороне AB, параллельно AC, точки H и E соединяем линиею EH. Параллелограммы $FEHA$, $FEIK$, $KIHA$ с треугольниками FKA, EIH образуют призму, которая может быть рассматриваема половиною такой, которой FK высота, параллелограмм $AKIH$ основание [76], и следовательно величина ее равна половине произведения площади параллелограмма $AKIH$ на высоту $\frac{p}{2}$.



Черт. 45.

Треугольники DEG, EBI одинаковы, потому что $DG=EI$; углы при точках D и E равны; углы при точках G и I прямые; следовательно, $DE=BE=\frac{1}{2}BD$; $GE=BI=\frac{1}{2}\ BC$. Потому же $FG=AK=\frac{1}{2}\ AC$, $AF=$ $=FD=\frac{1}{2}\ AD$. Треугольники FDE, HEB одинаковы, потому что $DE=$ $=EB$, $FD=HE$, углы при точках D и E равны, следовательно $FE=HB=\frac{1}{2}AB$. Треугольники FGE, HIB одинаковы, потому что у них стороны равные, а как $EI=DG$, то и пирамиды $HIBE$, $FGED$ одинаковы, в чем легко увериться, перенося одну на другую.

Величину пирамиды $FEGD$ означим буквою P_1. Треугольники KCI, HIB одинаковы и равны половине параллелограмма $AKIH$, следовательно, площадь основания ABC обозначая буквою O, будет площадь параллелограмма $AKIH=\frac{1}{2}\ O$; площадь треугольника $KCI=\frac{1}{4}\ O$. Величина пирамиды $P=$ призме $FGEIKC+$ призма $AFKIHE+2$ пирамиды $FEGD=\frac{1}{4}\ p \cdot O+2P_1$. Основанием пирамиды P_1 можно принимать треугольник FGE, то есть $\frac{1}{4}\ O$, высотою же линию DG, то есть $\frac{1}{2}p$. И так если означим чрез P_2 величину такой пирамиды, которой основание $\frac{1}{4^2}\ O$, высота $\frac{1}{2^2}p$;

чрез P_3, которой основание $\frac{1}{4^3}O$, высота $\frac{1}{2^3}p$; чрез P_4, которой основание $\frac{1}{4^4}O$, высота $\frac{1}{2^4}p$, вообще чрез P_n величину такой пирамиды, которой основание $\frac{1}{4^n}O$, высота $\frac{1}{2^n}p$, и где n целое положительное число, то величины пирамид P, P_1, P_2 P_3 и т. д. до P_n могут быть определены одна помощию другой, из таких уравнений:

$$P=\frac{1}{4}pO+2P_1;$$

$$P_1=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}p\cdot\frac{1}{4}O+2P_2;$$

$$P_2=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2^2}p\cdot\frac{1}{4^2}O+2P_3;$$

$$P_3=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2^3}p\cdot\frac{1}{4^3}O+2P_4;$$

. . . .

$$P_{n-1}=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2^{n-1}}p\cdot\frac{1}{4^{n-1}}O+2P_n.$$

Вставляем в первое уравнение вместо P_1 значение его из второго; потом вместо P_2 значение его из третьего и т. д. до последнего P_{n-1}, находим что

$$P=\frac{1}{4}pO\left\{1+\frac{1}{4}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{4^3}+\ldots+\frac{1}{4^{n-1}}\right\}+2^nP_n=$$

$$=\frac{1}{3}pO-\frac{1}{3\cdot4^n}pO+2^nP_n.$$

Если вместо P_n возьмется величина призмы, которой основание $\frac{1}{4^n}O$, высота $\frac{1}{2^n}p$, то такая призма будет более P_n, и следовательно, $P-\frac{1}{3}pO<\frac{2}{3\cdot4^n}pO$. Какие бы числа p и O ни были, всегда можно приискать такое число n, что $\frac{2}{3\cdot4^n}pO$ будет менее всякого данного числа, а следовательно, разность $P-\frac{1}{3}pO$ должна быть менее всякого числа, то есть $P=\frac{1}{3}pO$ [77].

Если пирамида не прямая трехсторонняя, то ее можно разделить плоскостями, проходящими чрез высоту, на трехсторонние прямые A', B', C' и т. д., которых основания треугольники A, B, C и т. д. и которых величины $\frac{1}{3}pA$, $\frac{1}{3}pB$, $\frac{1}{3}pC$ и т. д., а как соединение пирамид A', B', C' и т. д. для составления P, точно такое же, какое нужно для соединения треугольников A, B, C и т. д., чтоб произвесть основание пирамиды P, то, отсюда и следует, что величина всякой пирамиды равна одной трети произведения основания на высоту.

Всякое тело, ограниченное многоугольниками, можно составить из пирамид; для сего надобно взять точку где нибудь, вне тела, на поверхности его, или внутри, проводить чрез нее и стороны многоугольников тела плоскости. Таким образом произойдут пирамиды, числом сколько многоугольников: из них составится тело, когда, начиная с той, которая вся, или частию заключается в теле, будут сложены все те, которых телесные углы прикладываются, и вычтены все те, которых телесные углы отнимаются.

ГЛАВА XI

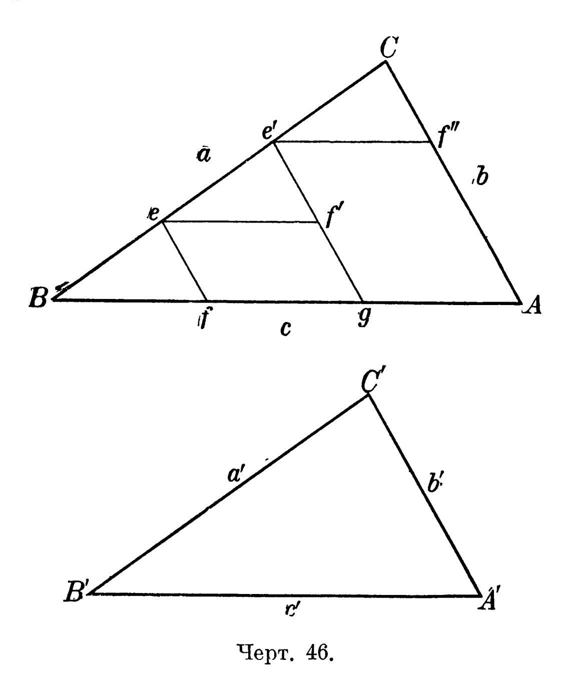
ИЗМЕРЕНИЕ ОКРУЖНОСТИ КРУГА И ПЛОЩАДИ КРУГА

Способ измерения кривых линий, плоскостей, ограниченных кривыми линиями, кривых поверхностей и тел, ограниченных сими поверхностями, состоит в том, как было уже сказано [78], чтоб разделять кривые линии и поверхности на весьма малые части, ставить вместо них прямые линии или плоскости, потом искать ту границу, к которой приближается величина кривой линии, поверхности или тела [79], тем более, чем части деления возьмутся менее. Такая граница принимается за искомую истинную величину. В действительном измерении, т. е. в измерении помощию цепей, нитей, вообще гибких тел, стараются также ближе подходить к такой величине [80].

Чтобы определить величину прямых линий, которыми заменяют весьма малые части кривой, и отсюда заключать о величине кривой, надобно знать, говоря вообще, каким образом находить величину одной стороны треугольника, когда даны его части, составляющие условия одинаковости. Но для измерения кругов, шаров, и всякой геометрической величины, куда входят такие линии и поверхности, нужно знать только, каким образом одна из сторон прямоугольного треугольника определяется помощию двух прочих [81].

Если в двух треугольниках все углы равны, то стороны их, соответственно углам, бывают пропорциональны. Полагаем, что (черт. 46) угол $A = \angle A'$, $\angle B = \angle B'$, $\angle C = \angle C'$; полагаем далее, что содержание стороны a к a' выражается содержанием двух целых чисел p и q. Разделяем сторону a на p частей, сторону a' на q частей. Те и другие части будут равны между собою. Ведем чрез точки деления линии параллельные стороне b в треугольнике ABC и линии параллельные стороне b' в другом треуголь-

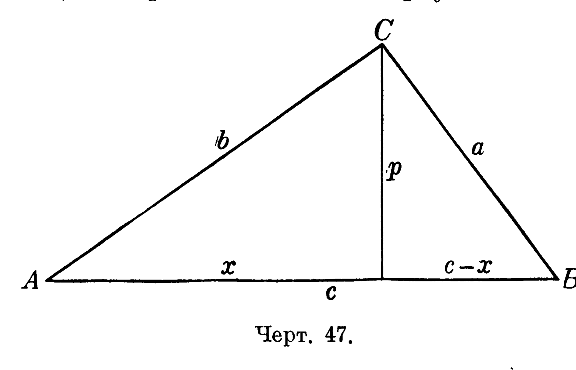
нике. Между сими линиями также чрез точки деления ведем в одном треугольнике линии параллельные с c, в другом с c'. Например пусть сторона a разделена на три части, линии ef, $e'g$ проведены параллельно с b, а линии ef', $e'f''$ параллельно с c, то



Черт. 46.

происшедшие здесь треугольники Bef, $ee'f'$, $e'Cf''$ будут одинаковы между собою, потому что у них по одной равной стороне и углы равны, следовательно, $Bf = ef' = e'f''$, $ef = e'f' = Cf''$. Откуда видно, что сторона c разделяется параллельными линиями на три равные части. Какое бы деление стороны a ни было, всегда будет выходить то же, т. е. что линии параллельные с стороною b, проведенные чрез точки деления, разделят и сторону c на столько же равных частей, на сколько частей делится сторона a. То же произойдет и в треугольнике $A'B'C'$, да притом части стороны c' будут равны частям стороны c, потому что они принадлежат к одинаковым треугольникам. И так, если a разделена на p частей, a' на q частей, которые части все равны между собою, то и сторона c разделится также на p частей, сторона c' на q частей таких же, т. е. содержание стороны c к c' остается тем же. То же можно доказать и для сторон b и b'. Треугольники, каковы здесь ABC и $A'B'C'$, называются в Геометрии *подобными* [82].

В прямоугольном треугольнике ABC (черт. 47) из прямого угла C опускаем перпендикул p на гипотенузу c; часть ее к углу A называем x, остальная будет $c-x$, сторону противоположную углу B означаем чрез b, другой катет чрез a. Перпендикул p разделяет прямоугольный треугольник на два другие прямоугольные, которые подобны с треугольником ABC. Отсюда следует, что $x=\frac{b^2}{c}$, $c-x=\frac{a^2}{c}$. Соединяя оба уравнения, находим $c^2=a^2+b^2$, то есть, квадрат гипотенузы равен сумме квадратов катетов. Так зная две стороны прямоугольного треугольника, можно определить третию [83].



Черт. 47.

Полагаем теперь, что полупоперешник r дуги известен, ее хорда c также. Отсюда можно найти величину хорды c' половины данной дуги. Сперва определяем перпендикул p из центра на хорду c, его находим $p=\sqrt{r^2-\frac{c^2}{4}}$. В прямоугольном треугольнике (черт. 48), которого гипотенуза c', катеты $\frac{1}{2}c$ и $r-p$, находим

$$c'=\sqrt{\frac{1}{4}c^2+(r-p)^2},$$

куда вставляя значение p, получим:

$$c'=r\cdot\sqrt{2-\sqrt{4-\left(\frac{c}{r}\right)^2}}.$$

Хорда дуги 200° есть поперешник $2r$, посему хорда дуги

$$\frac{200^\circ}{2}=r\cdot\sqrt{2}\ [84].$$

$$\frac{200^\circ}{2^2}=r\cdot\sqrt{2-\sqrt{2}}.$$

$$\frac{200^\circ}{2^3}=r\cdot\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}.$$

$$\frac{200^\circ}{2^4}=r\cdot\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}.$$

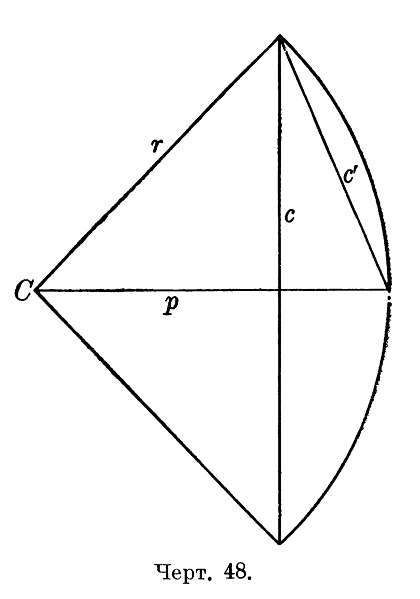
$$\frac{200^\circ}{2^5}=r\cdot\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}}.$$

Отсюда видно уже, что вообще хорда дуги

$$\frac{200^\circ}{2^n} = r \cdot \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \ldots}}}} \text{ и т. д.,}$$

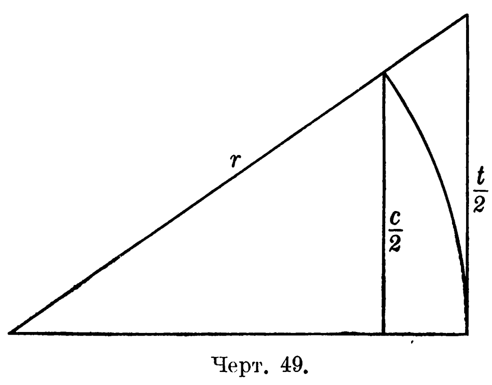
где число 2 под корнями входит n раз [85]. Число, которое здесь умножается на r, должно быть тем менее, чем число n более, и, следуя правилу, данному для измерения кривых линий, число, о котором здесь говорится, будучи умножено на 2^n, даст дугу в 200° и тем вернее, чем n возвысится более. Таким образом можно найти, что дуга в 200° равна

$$r \cdot 3{,}141592653\ldots$$



Черт. 48.

Число, на которое здесь умножается r, может быть найдено только чрез приближение в десятичных дробях, его обыкновенно означают в математических книгах π, так что величина дуги 200° будет выражаться πr. Величина всякой другой дуги, которой число градусов q, будет $\frac{q}{200}\,\pi r$; откуда видно, что дуги одинакового числа градусов содержатся как поперешники.



Черт. 49.

Остается еще показать, что под числом π можно разуметь границу, к которой приближается произведение 2^n на значение хорды дуги $\frac{200^\circ}{2^n}$ тем более, чем число n более [86]. Называем c хорду, которой дуга $\frac{200^\circ}{2^n}$, проводим полупоперешник чрез средину хорды c до окружности круга и здесь восставляем перпендикул (черт. 49), величину которого между полупоперешниками, проходящими чрез концы хорды c, называем t. Находим:

$$t = \frac{c \cdot r}{\sqrt{r^2 - \frac{1}{4}c^2}},$$

отсюда разность

$$t-c=c\frac{r-\sqrt{r^2-\frac{1}{4}c^2}}{\sqrt{r^2-\frac{1}{4}c^2}}.$$

Число $r-\sqrt{r^2-\frac{1}{4}c^2}$ изображает расстояние между линиями c и t, которое тем менее, чем n более, и может быть сделано менее всякого данного числа. Далее называя K площадь круга полупоперешника r, видим, что

$$K<2^{n-1}\cdot tr$$

и

$$K>2^{n-1}\cdot cr$$ [87]; .

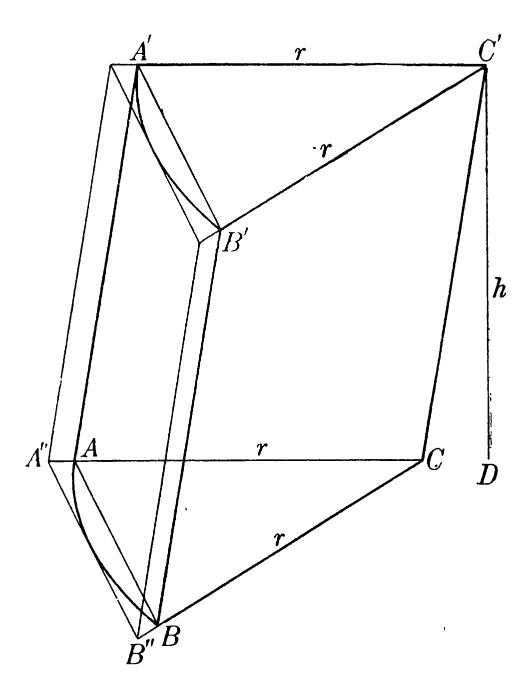
разность же $2^{n-1}\cdot r(t-c)$, так как представляет площадь между линией c и t, тем менее, чем более n, и может быть уменьшена за всякую величину [88]; следовательно $2^{n-1}\cdot c\cdot r$ тем ближе подходит к K, чем более n. Итак π возможно находить чрез приближение, и площадь круга

$$K=\pi\cdot r^2.$$

ГЛАВА XII

ОБ ИЗМЕРЕНИИ ОБЪЕМА ЦИЛИНДРА И КОНУСА, ПОВЕРХНОСТЕЙ ПРЯМОГО ЦИЛИНДРА И ПРЯМОГО КОНУСА

Цилиндром называют тело, ограниченное двумя параллельными равными кругами и кривою поверхностию, которой свойство таково, что она пересекается в прямых линиях плоскостями, проходящими чрез центры кругов. Из сего определения видно, что цилиндр есть призма, которой основание круг [89]. Линия, соединяющая центры кругов цилиндра, называется *осью*, а каждый из кругов *основанием*, перпендикул между основаниями — *высотою*. Цилиндры бывают *прямые*, когда их ось перпендикулярна к основанию, *наклоненные* в противном случае.



Черт. 50.

Воображаем окружность основания цилиндра разделенною на 2^n частей, разумея под n целое число, чрез точки деления и ось цилиндра воображаем плоскости, то весь цилиндр разделится на 2^n частей такого вида, как здесь представлено в чертеже (черт. 50). Линия CC' ось цилиндра, линии AC, BC, $A'C'$, $B'C'$, равны полупоперешнику основания, который означим чрез r,

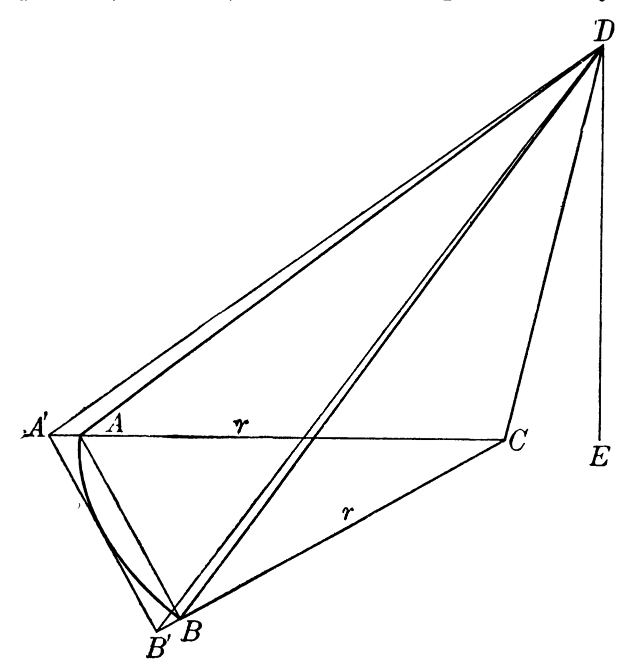
кривые линии AB, $A'B'$ представляют 2^n-ю часть окружности основания, линия $C'D$ высоту цилиндра, которую означим чрез h. Если проводим плоскость чрез линии AA', BB', то пересечение сей плоскости с вырезками кругов ACB, $A'C'B'$ дает прямые линии AB, $A'B'$, которые будут хордами дуги $\frac{400°}{2^n}$; а величина происшедшей здесь призмы $A'C$ будет произведение треугольника ABC на высоту h; а величина всех подобных призм около оси CC' цилиндра будет $2^n \cdot h \cdot ABC$. Это количество тем ближе выражает величину цилиндра, чем число n взято будет более; ибо истинная величина цилиндра заключается между $2^n h \cdot ABC$ и $2^n h \cdot A''CB''$, где $A''CB''$ изображает площадь треугольника, которая ограничивается продолженными полупоперешниками AC, BC и линиею $A''B''$, перпендикулярною к полупоперешнику r в средине дуги AB. Но разность $2^n \cdot A''CB'' - 2^n \cdot ABC$, как мы видели [90], тем становится менее, чем n более, и может быть сделана менее всякого произвольного числа; следовательно $2^n \cdot h \cdot ABC$ тем ближе к истинной величине цилиндра, чем n более, произведение же $2^n \cdot ABC$ тем ближе изображает основание цилиндра, чем n более; итак истинная величина цилиндра есть произведение основания на высоту, так как и величина всякой призмы, то есть равна $\pi r^2 h$.

Чтоб найти величину кривой поверхности цилиндра, надобно вместо частей ее $ABB'A'$ поставлять параллелограммы $ABB'A'$ и соединять их площади; но такие параллелограммы тогда только будут равны между собою, когда цилиндр прямой. В сем случае легко видеть, что параллелограмм $ABB'A'$ будет прямоугольник, которого площадь $= h \cdot AB$, а следовательно сумма всех параллелограммов на поверхности цилиндра $= 2^n \cdot AB \cdot h$, которое количество тем ближе выражает истинную величину поверхности цилиндра, чем n более; но мы видели, что $2^n \cdot AB$ тем ближе подходит к величине окружности круга, которого полупоперешник r, чем n число более; следовательно истинная величина кривой поверхности прямого цилиндра равна произведению высоты на окружность основания, то есть $2\pi \cdot r \cdot h$.

Конусом называется тело, ограниченное кругом и кривою поверхностию такого свойства, что на ней есть точка, чрез которую и центр круга проведенные плоскости пересекают кривую

поверхность конуса в прямых линиях. Такое определение показывает, что конус есть пирамида, которой основание круг. Круг конуса называется *основанием*; точка, чрез которую можно проводить прямые линии к окружности основания в поверхности конуса, называется *вершиною*, а линия, соединяющая сию точку с центром основания, — *осью*, перпендикул из вершины на основание — *высотою*. Конусы бывают *прямые*, когда их ось будет вместе высотою, в противном случае конусы получают название *наклоненных*.

Воображаем основание конуса разделенным на 2^n равных частей и чрез точки деления и ось конуса проведенные плоскости, то сими плоскостями разделится конус на 2^n частей таких, как представляет чертеж (черт. 51). Точка D вершина конуса, C центр



Черт. 51.

основания, линии AC, BC полупоперешники основания, которые пусть будут r, линия DC ось конуса, линия $DE = h$ высота конуса, кривая линия AB есть 2^n-я часть окружности основания. Проводим плоскость чрез точки D, A и B, величина пирамиды $DABC$ будет $\frac{1}{3}h \cdot ABC$, а величина всех таких пирамид в конусе около оси DC будет $\frac{1}{3}h \cdot 2^n ABC$. Продолжаем

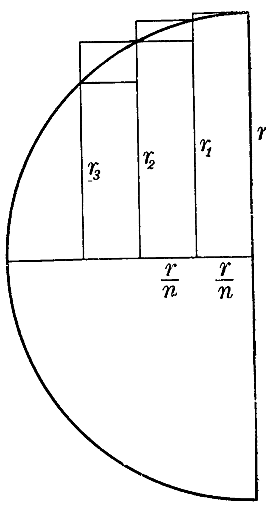
полупоперешники AC и BC, покуда они встретят $A'B'$, проведенную перпендикулярно к r в средине дуги AB. Истинная величина конуса заключается между $\frac{1}{3}h \cdot 2^n ABC$ и $\frac{1}{3}h \cdot 2^n A'CB'$, разность же $2^n ACB - 2^n A'CB'$ тем менее, чем n более, и может быть сделана менее всякого числа; с другой стороны произведение $2^n \cdot ABC$ тем ближе подходит к величине круга, которого полупоперешник r, чем число n более; следовательно истинная величина конуса равна произведению основания на одну треть высоты, так же как и пирамиды, то есть $= \frac{1}{3}h\pi r^2$.

В прямом конусе треугольники ADB одинаковы между собою, посему вместо части кривой поверхности ADB, подставляя треугольник ADB и умножая на 2^n, получим величину кривой поверхности конуса тем вернее, чем число n возьмется более. Площадь $\triangle ADB = \frac{1}{2} AB \sqrt{AD^2 - \frac{1}{4}AB^2}$; линия AD во всех треугольниках одинакова и есть расстояние вершины конуса от окружности основания; ее можно найти помощию высоты h прямого конуса и полупоперешника r основания, именно $AD = \sqrt{h^2 + r^2}$. Итак поверхность конуса $= \frac{1}{2} \cdot 2^n \cdot AB \sqrt{h^2 + r^2 - \frac{1}{4}AB^2}$, которого выражения должна быть взята граница; но граница произведения $2^n AB$ есть окружность основания $2\pi r$, а линия AB тем ближе подходит к нулю, чем число n более; следовательно поверхность прямого конуса $= \pi \cdot r \sqrt{h^2 + r^2}$.

ГЛАВА XIII

О ВЕЛИЧИНЕ ОБЪЕМА И ПОВЕРХНОСТИ ШАРА

Разделяем шар на две равные части плоскостию чрез центр, ведем с сею плоскостию параллельные, которые бы отстояли друг от друга на n частей полупоперешника шара r, разумея под n целое число. Каждая половина шара разделится таким образом на n частей параллельными плоскостями, которых пересечение дает круги. Удерживая одну только из двух половин шара и пересекая ее снова плоскостию, проходящею чрез полупоперешник, разделенный на n частей, разрез сей плоскости с половиною шара будет иметь вид, представленный на чертеже (черт. 52). Означаем чрез r_1, r_2, r_3, и т. д. полупоперешники кругов, которые отстоят от центра шара на $\frac{r}{n}$, $\frac{2r}{n}$, $\frac{3r}{n}$ и т. д. Если возьмется сумма n цилиндров, которых всех высота одинаковая и равная $\frac{r}{n}$, а полупоперешники оснований r, r_1, r_2, r_3,



Черт. 52.

и т. д. до r_{n-1}, то ясно, что такая сумма будет превышать половину объема шара; напротив если возьмется сумма $n-1$ цилиндров, откинув первый, то такая сумма будет менее половины объема шара [91], и следовательно истинная величина шара заключается между:

$$2\pi \frac{r}{n} \left\{r^2 + r_1^2 + r_2^2 + \ldots + r_{n-1}^2\right\}$$

и

$$2\pi \frac{r}{n} \left\{r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 + \ldots + r_{n-1}^2\right\}.$$

Разность между той и другой границей составляет $\frac{2\pi r^3}{n}$ и следовательно может быть сделана менее всякого данного числа, увеличивая n. Отсюда видно, что объем шара тем ближе подходит к одной из двух написанных здесь границ, чем число n будет более. Полупоперешники r_1, r_2, r_3, r_4 и т. д. определяются из r и числа n так:

$$r_1^2 = r^2 - \frac{r^2}{n^2}; \quad r_2^2 = r^2\left(1 - \frac{2^2}{n^2}\right); \quad r_3^2 = r^2\left(1 - \frac{3^2}{n^2}\right) \text{ и т. д...}$$

$$r_{n-1}^2 = r^2\left(1 - \frac{(n-1)^2}{n^2}\right),$$

что вставляя, получим величину объема шара [92]:

$$2\pi r^3 \left\{1 - \frac{1}{n^3}(1 + 2^2 + 3^2 + \ldots + (n-1)^2)\right\}.$$

Вместо суммы квадратов, которая здесь умножается на $\frac{1}{n^3}$, можно поставить $\frac{n}{6}(2n^2 - 3n + 1)$; справедливость сего можно видеть по числам $n = 1$, $= 2$, $= 3$; а чтоб это было справедливо и для всякого целого числа n, надобно чтоб

$$\frac{n}{6}(2n^2 - 3n + 1) + n^2 = \frac{n+1}{6}\{2(n+1)^2 - 3(n+1) + 1\},$$

что находится действительно верным [93]. Итак объем шара тем ближе подходит к

$$2\pi r^3 \left\{\frac{2}{3} + \frac{1}{2n} - \frac{1}{6n^2}\right\}.$$

чем число n более, а как здесь та часть, где n знаменателем, тем ближе подходит к нулю, чем n более, следовательно истинная величина объема шара $= \frac{4}{3}\pi r^3$ [94].

Способ, который предложен здесь для определения величины шара, может служить вместе и для определения величины отрезка шара плоскостию. Пусть h расстояние между двух параллельных плоскостей, из которых одна прохо́дит чрез центр; пусть содержание линии h к полупоперешнику шара r будет содержание двух целых чисел m и n. Числа m и n могут быть умножены на равные числа, и следовательно число n можно увеличивать беспредельно. Разделяя расстояние h на m равных частей и проводя в точках деления параллельные плоскости с двумя данными, часть шара между двумя крайними плоскостями будет тем ближе подходить к

$$\pi r^3 \left\{\frac{m}{n} - \frac{1}{n^3}(1 + 2^2 + 3^2 + \ldots + (m-1)^2)\right\},$$

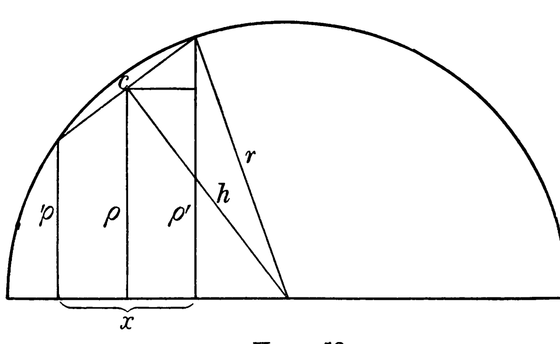
чем число n более. Сумма квадратов, которая здесь умножается на $\frac{1}{n^3}$, как мы видели, $=\frac{1}{3}m^3-\frac{1}{2}m^2+\frac{1}{6}m$. Следовательно, все выражение $=\pi r^3\left\{\frac{m}{n}-\frac{1}{3}\left(\frac{m}{n}\right)^3+\frac{1}{2n}\left(\frac{m}{n}\right)^2-\frac{1}{6n^2}\left(\frac{m}{n}\right)\right\}=$ $=\pi r^3\left\{\frac{h}{r}-\frac{1}{3}\left(\frac{h}{r}\right)^3+\frac{1}{2n}\left(\frac{h}{r}\right)^2-\frac{1}{6n^2}\left(\frac{h}{r}\right)\right\}$.

Члены, которые здесь делятся на n, приближаются тем ближе к нулю, чем число n более; итак истинная величина части шара между двумя плоскостями $=\pi\left(r^2-\frac{1}{3}h^2\right)h$. Вычитая сие количество из объема половины шара, получим величину отрезка $\frac{1}{3}\pi\cdot(2r^3-3r^2\cdot h+h^3)$, или ставя $r-p$ вместо h, величина отрезка будет $\frac{1}{3}\pi\cdot p^2(3r-p)$. Если присоединяем к сему отрезку конус, которого высота h, расстояние вершины от окружности основания r, то получим конический вырезок шара $\frac{2}{3}\pi r^2 p$. Разность такого конического вырезка с другим, в котором линия p будет $p-a$, найдется $\frac{2}{3}\pi r^2\cdot a$, и следовательно величина такой части шара не зависит от положения линии a в отношении к центру.

Чтоб найти величину поверхности, то следуя общему правилу, надобно разделять ее на чрезвычайно малые части и подставлять вместо таких частей плоскости, которые, будучи соединены все, дадут величину поверхности тем точнее, чем части были взяты менее. Всего простее разделять поверхность шара сперва плоскостями вокруг поперешника, потом плоскостями, перпендикулярными к поперешнику. От сего произойдут части поверхности, ограниченные четырьмя дугами, и легко видеть, что четыре точки пересечения дуг лежат в одной плоскости; посему, соединяя четыре точки прямыми линиями, надобно будет брать часть плоскости между четырьмя линиями вместо части кривой поверхности. Начиная соединять части между двух последующих параллельных плоскостей, так как здесь число частей не зависимо от частей поперешника, то, полагая его увеличивающимся беспредельно, вся часть поверхности между двумя плоскостями будет подходить к части конической поверхности, проведенной между кругами, ограничивающими параллельные плоскости, которая следовательно и будет истинною величиною сей части поверхности шара [95].

Называем r полупоперешник шара, c расстояние окружностей двух параллельных последующих плоскостей [96]; $'\rho$ полупоперешник меньшей окружности, ρ' полупоперешник большей, величина

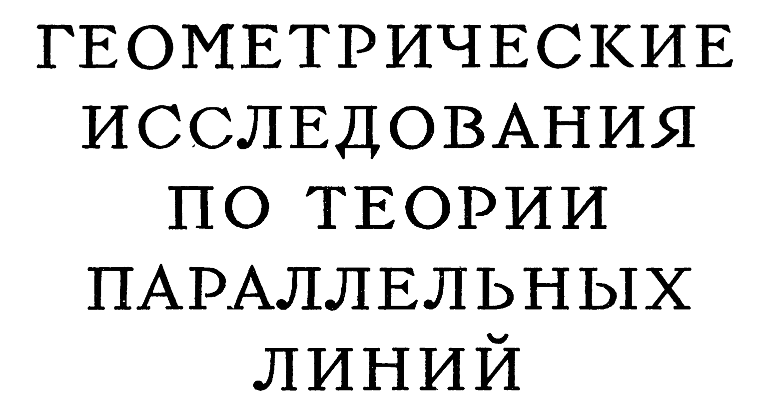
конической поверхности между двумя кругами будет $\pi \cdot c\,('\rho+\rho')$. Воображаем теперь половину шара, отделенную плоскостию чрез поперешник, к которому $'\rho$ и ρ' перпендикулярны, потом пересекаем сию половину еще плоскостию, проходящею чрез тот же поперешник (черт. 53). На сей последней плоскости будут находиться



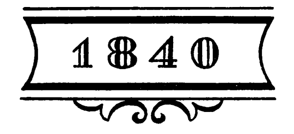
Черт. 53.

линии $'\rho$ и ρ' и хорда c. Из средины хорды c опускаем перпендикул ρ на поперешник и соединяем также средину хорды c линиею h с центром шара. Называем x расстояние между $'\rho$ и ρ'. Если из средины c опускаем перпендикул на ρ', то получится прямоугольный треугольник, которого гипотенуза $\frac{1}{2}c$, катеты $\frac{1}{2}x$ и $\rho'-\rho$, подобный с прямоугольным треугольником, которого гипотенуза h, катеты ρ и расстояние средины x от центра. Отсюда находим $c=x\cdot\frac{h}{\rho}$. Сумма $'\rho+\rho'$ равна 2ρ, следовательно $\pi c\,('\rho+\rho')=2\pi\cdot h\cdot x$. Для большей простоты пусть хорды c между параллельными плоскостями равны; тогда и линии h для всех c будут также равны, а сумма всех конических поверхностей от одного конца поперешника до другого сделается $4\pi r\cdot h$, которая будет тем ближе изображать поверхность шара, чем хорды c будут менее; но чем хорда c менее, тем h ближе подходит к r и следовательно истинная величина поверхности шара $=4\pi r^2$, то есть равна четырем большим кругам шара.

Можно найти поверхность шара еще так: какое бы деление поверхности на части ни было, ставя вместо них плоскости s и опуская перпендикул $r-p$ на s, надобно, чтоб сумма всех произведений $\frac{1}{3}s\,(r-p)$ давала тем ближе $\frac{4}{3}\pi r^3$, чем s будет менее. Но чем менее плоскости s, тем p подходит ближе к нулю, а сумма плоскостей s — к поверхности шара, которая, следовательно, и должна быть $4\pi r^2$, как и выше найдено.



ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ИССЛЕДОВАНИЯ ПО ТЕОРИИ ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ ЛИНИЙ



Перевод с немецкого

В. Ф. КАГАНА

Geometrische Untersuchungen

zur

Theorie der Parallellinien

von

Nicolaus Lobatschewsky,

Kaiserl. russ. wirkl. Staatsrathe und ord. Prof. der Mathematik
bei der Universität Kasan

Berlin, 1840.

In der G. Fincke'schen Buchhandlung

Титульный лист оригинального издания сочинения Лобачевского «Геометрические исследования».

$$\text{Cos. } \Pi(\alpha) = \text{sin. } \Pi(\beta)\, e^{f(c)}$$

und indem man α und β in b′ und c verändert:

$$\text{sin. } \Pi(b) = \text{sin. } \Pi(c)\, e^{f(a)}$$

ferner durch Multiplikation mit $e^{f(b)}$

$$\text{sin. } \Pi(b)\, e^{f(b)} = \text{sin. } \Pi(c)\, e^{f(c)}$$

Hieraus folgt auch

$$\text{sin. } \Pi(a)\, e^{f(a)} = \text{sin. } \Pi(b)\, e^{f(b)}$$

Da nun aber die Geraden a und b von einander unabhängig sind, und außerdem $f(b) = o$, $\Pi(b) = \frac{1}{2}\pi$ für $b = o$, so ist für jede gerade Linie a

$$c^{-f(a)} = \text{sin. } \Pi(a)$$

demnach:

$$\text{sin. } \Pi(c) = \text{sin. } \Pi(a) \text{ sin. } \Pi(b)$$

$$\text{sin. } \Pi(\beta) = \text{Cos. } \Pi(\alpha) \text{ sin. } \Pi(a)$$

Hieraus erhält man noch durch Veränderung der Buchstaben:

$$\text{sin. } \Pi(\alpha) = \text{Cos. } \Pi(\beta) \text{ sin. } \Pi(b)$$

$$\text{Cos. } \Pi(b) = \text{Cos. } \Pi(c) \text{ Cos. } \Pi(\alpha)$$

$$\text{Cos. } \Pi(a) = \text{Cos. } \Pi(c) \text{ Cos. } \Pi(\beta)$$

Wenn man im sphärischen rechtwinkligen Dreiecke (Fig. 29.) die Seiten $\Pi(c)$, $\Pi(\beta)$, $\Pi(a)$, mit den gegenüberliegenden Winkeln $\Pi(b)$, $\Pi(\alpha')$ durch die Buchstaben a, b, c,

Страница текста оригинального издания сочинения Лобачевского «Геометрические исследования».

ВСТУПЛЕНИЕ

В геометрии я нашел некоторые несовершенства, которые я считаю причиной того, что эта наука, поскольку она не переходит в анализ, до настоящего времени не вышла ни на один шаг за пределы того состояния, в каком она к нам перешла от Евклида. К этим несовершенствам я отношу неясность в первых понятиях о геометрических величинах, способы, которыми мы себе представляем измерение этих величин, и, наконец, важный пробел в теории параллельных линий, к восполнению которого все усилия математиков до настоящего времени были тщетными. Старания Лежандра не прибавили к этой теории ничего, так как он был вынужден оставить единственно строгий ход [исследования], стать на побочный путь и прибегнуть к вспомогательным предложениям, которые он без обоснования старается изобразить как необходимые аксиомы [9·].

Свой первый опыт по началам геометрии я опубликовал в «Казанском вестнике» за 1829 г. В надежде, что я удовлетворил всем требованиям, я занялся после этого обработкой всей этой науки и эту свою работу опубликовал отдельными частями в «Ученых записках Казанского университета» за 1836, 1837 и 1838 гг. под заглавием «Новые начала геометрии с полной теорией параллельных» [98]. Размер этой работы, быть может, мешает моим соотечественникам следить за предметом, который после Лежандра утратил интерес. Я держусь, однако, мнения, что теория параллельных линий не должна была бы отказаться от своих притязаний на внимание математиков; поэтому я намерен изложить здесь сущность моих исследований; при этом вперед отмечу, что, вопреки мнению Лежандра [99], все остальные несовершенства, как, например, определение прямой линии, оказываются здесь посторонними и лишены всякого влияния на теорию параллельных линий.

I. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ ПРЕДЛОЖЕНИЯ

Чтобы не утомлять читателей множеством таких предложений, коих доказательства не представляют затруднений, я привожу здесь наперед только те из них, знание которых необходимо для последующего.

1) *Прямая линия покрывает себя самое во всех положениях.* Под этим я разумею, что при вращении поверхности прямая линия не меняет своего места, если она проходит через две неподвижные точки поверхности [[100]].

2) Две прямые не могут пересекаться в двух точках [[101]].

3) Прямая линия, будучи достаточно продолжена в обе стороны, должна уходить за всякие пределы и таким образом делит ограниченную плоскость на две части [[102]].

4) Две прямые, перпендикулярные к одной и той же третьей прямой, никогда не пересекаются, сколько бы мы их ни продолжали [[103]].

5) Прямая линия всегда пересекает другую прямую, если переходит с одной ее стороны на другую [[104]].

6) Вертикальные углы, у которых стороны одного составляют продолжения сторон другого, равны. Это справедливо как в применении к плоским прямолинейным углам, так и в применении к плоскостным двугранным углам.

7) Две прямые не могут пересечься, если какая-либо третья прямая пересекает их под равными углами [[105]].

8) В прямолинейном треугольнике равным углам противолежат равные стороны, и обратно.

9) В прямолинейном треугольнике большей стороне противолежит также больший угол. В прямоугольном треугольнике

гипотенуза больше каждого из катетов, и прилежащие к ней углы острые.

10) Прямолинейные треугольники конгруэнтны [106], если у них равны сторона и два угла или две стороны и заключенный между ними угол, или две стороны и угол, противолежащий большей стороне, или три стороны.

11) Прямая линия, перпендикулярная к двум другим прямым, не лежащим с нею в одной плоскости, перпендикулярна ко всем прямым, проведенным через точку их общего пересечения в плоскости двух последних прямых.

12) Пересечение шара плоскостью есть круг [107].

13) Прямая, которая перпендикулярна к линии пересечения двух перпендикулярных плоскостей и расположена в одной из этих плоскостей, перпендикулярна к другой плоскости.

14) В сферическом треугольнике равным сторонам противолежат равные углы, и обратно.

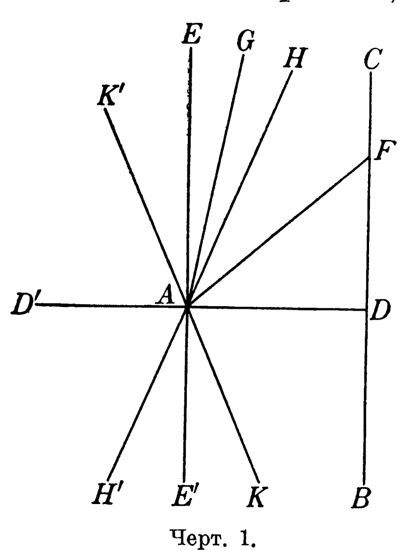
15) Сферические треугольники конгруэнтны, если у них равны две стороны и угол заключенный между ними, или же сторона и прилежащие к ней углы [108].

Начиная отсюда, дальнейшие предложения уже сопровождаются пояснениями и доказательствами.

7 Зак. 754. Н. И. Лобачевский

II. ПАРАЛЛЕЛЬНЫЕ ЛИНИИ

16) Все прямые линии, выходящие в некоторой плоскости из одной точки, могут быть по отношению к некоторой заданной прямой той же плоскости разделены на два класса, именно на *пересекающие* ее и *непересекающие*. *Граничная линия* одного и другого класса этих прямых линий называется *параллельной заданной линии* [109].



Черт. 1.

Из точки A (черт. 1) опустим на заданную линию BC перпендикуляр AD, к которому, в свою очередь, восставим перпендикуляр AE. В прямом угле EAD прямые, выходящие из точки A, либо все встречают линию DC, как, например, AF, либо же некоторые, подобно перпендикуляру AE, не встречают линии DC. Не зная, есть ли перпендикуляр AE единственная линия, которая не встречается с DC, будем считать возможным, что существуют и другие линии, например AG, которые не встречают DC, сколько бы мы их ни продолжали. При переходе от пересекающих линий AF к непересекающим AG мы должны встретить линию AH, параллельную DC, — граничную линию, — по одну сторону которой ни одна линия AG не встречает DC, между тем как по другую сторону каждая линия AF пересекает линию DC. Угол HAD между параллелью AH и перпендикуляром AD называется *углом параллели* (углом параллельности); мы будем здесь обозначать его через $\Pi(p)$ при $AD = p$ [110].

Если $\Pi(p)$ есть прямой угол [111], то продолжение AE' перпендикуляра AE также будет параллельно продолжению DB линии DC; к этому еще заметим, что в отношении четырех прямых углов, которые при точке A образуют перпендикуляры AE и AD и их продолжения AE' и AD', каждая прямая линия, выходящая из точки A, либо сама, либо по крайней мере своим продолжением расположена в одном из тех двух прямых углов, которые обращены к линии BC, так что, кроме параллели EE', все другие прямые по достаточном продолжении в обе стороны должны пересекать линию BC.

Если $\Pi(p) < \frac{1}{2}\pi$, то по другую сторону перпендикуляра AD, под тем же углом $DAK = \Pi(p)$, будет проходить еще одна линия AK, параллельная продолжению DB линии DC; таким образом при этом допущении мы должны отличать еще *сторону параллельности* [112]. Все остальные линии или их продолжения внутри двух прямых углов, обращенных к BC, принадлежат к пересекающим, если они лежат внутри угла $HAK = 2\Pi(p)$ между параллелями; напротив того, они принадлежат к непересекающим AG, если они расположены по другую сторону параллелей AH и AK в отверстии двух углов

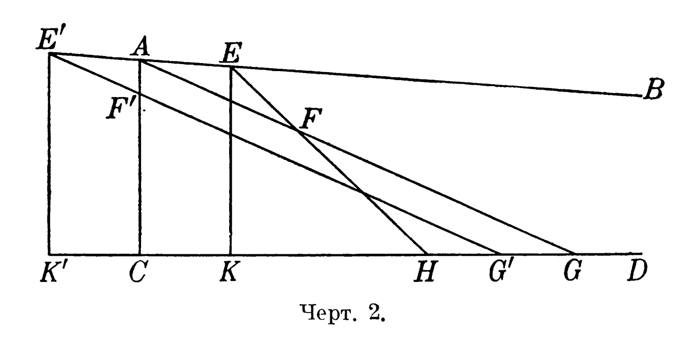
$$EAH = \frac{1}{2}\pi - \Pi(p), \quad E'AK = \frac{1}{2}\pi - \Pi(p)$$

между параллелями и перпендикуляром EE' к AD. Подобным же образом по другую сторону перпендикуляра EE' продолжения AH' и AK' параллелей AH и AK также будут параллельны BC; остальные линии принадлежат в угле $K'AH'$ к пересекающим, а в углах $K'AE$ и $H'AE'$ — к непересекающим.

Сообразно этому при предположении $\Pi(p) = \frac{1}{2}\pi$ линии могут быть только пересекающими или параллельными; если же принять, что $\Pi(p) < \frac{1}{2}\pi$, то нужно допустить две параллели, одну по одну сторону перпендикуляра, другую по другую его сторону; кроме того, между остальными линиями нужно различать пересекающие и непересекающие. Как при одном, так и при другом предположении признаком параллелизма служит то, что линия становится пересекающей при малейшем отклонении в ту сторону, где лежит параллель; таким образом, если AH параллельна DC, то каждая линия AF, сколь бы мал ни был угол HAF, пересекает DC [113].

17) *Прямая линия сохраняет признак параллельности во всех своих точках* [114].

Пусть прямая AB (черт. 2) будет параллельна CD [в точке A] и пусть AC будет перпендикуляр к последней. Мы рассмотрим две точки, которые расположены произвольно: одна на линии AB и другая на ее продолжении по другую сторону перпендикуляра.



Черт. 2.

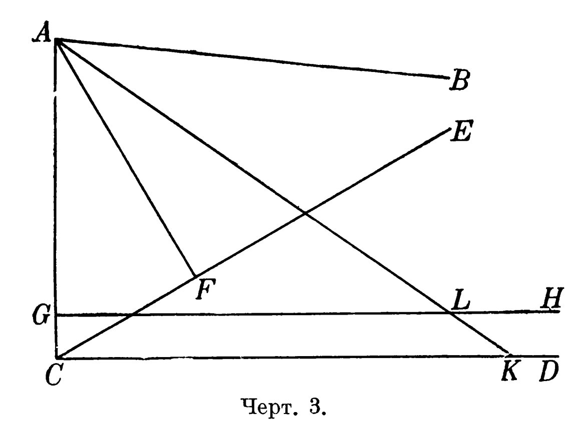
Положим, что точка E лежит по ту сторону перпендикуляра, с которой AB рассматривается как параллельная CD. Из точки E опустим перпендикуляр EK на CD, затем проведем EF так, чтобы она проходила внутри угла BEK. Точки A и F соединим прямой линией, продолжение которой должно встретить CD где-либо в G (предложение 16) [115]. Вместе с тем мы получим треугольник ACG, внутрь которого входит линия EF; так как эта последняя не может пересечь AC в силу самого построения, а также не может вторично встретить ни AG, ни EK (предложение 2), то она должна встретить CD в какой-либо точке H (предложение 3) [116].

Пусть теперь E' будет точка на продолжении линии AB и пусть $E'K'$ будет перпендикуляр на продолжении линии CD; проведем линию $E'F'$ под столь малым углом $AE'F'$, чтобы она пересекла AC где-либо в F'; затем из A проведем под тем же углом с AB линию AF, продолжение которой встретит CD в G (предложение 16). Таким образом мы получаем треугольник AGC, в который входит продолжение линии $E'F'$; так как эта линия не может вторично пересечь AE, а также не может пересечь AG, ибо угол $BAG = BE'G'$ (предложение 7), то она должна встретить CD где-либо в G'.

Таким образом, из каких бы точек E и E' [прямой AB] ни выходили линии EF и $E'F'$ и как бы мало они ни отклонялись от линии AB, они всегда пересекут линию CD, которой AB параллельна [117].

18) *Две линии всегда взаимно параллельны.*

Пусть AC будет перпендикуляр к линии CD (черт. 3), которой AB параллельна [118]; из C проведем линию CE под каким угодно острым углом ECD к CD и из A опустим перпендикуляр AF на CE; получим прямоугольный треугольник ACF, в котором гипотенуза AC больше катета AF (предложение 9). Отложим $AG = AF$ и наложим AF на AG; тогда AB и FE займут положение AK и GH, причем угол $BAK = FAC$ [119]; следовательно, AK должна пересечь линию DC где-либо в точке K (предложение 16); таким образом получится треугольник AKC, внутрь которого входит перпендикуляр GH; он встречает линию AK в L (предложение 3) и тем определяет на линии AB расстояние AL точки пересечения линий AB и CE от точки A.



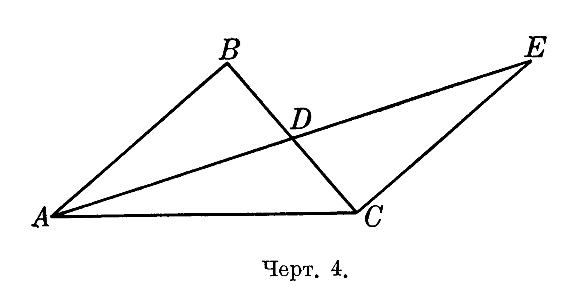
Черт. 3.

Отсюда следует, что CE всегда встретит AB, сколь бы мал ни был угол ECD; поэтому CD параллельна AB (предложение 16).

III. СУММА ВНУТРЕННИХ УГЛОВ ПРЯМОЛИНЕЙНОГО ТРЕУГОЛЬНИКА

19) *В прямолинейном треугольнике сумма трех углов не может превышать двух прямых.*

Допустим, что в треугольнике ABC (черт. 4) сумма трех углов равна $\pi+\alpha$; если его стороны не равны, возьмем наименьшую из них BC, разделим ее пополам в D, проведем из A через D линию AD и на ее продолжении сделаем DE равным AD; затем соединим точку E с точкой C прямой EC. В равных треугольниках ADB и CDE угол $ABD=DCE$ и $BAD=DEC$ (предложения 6 и 10); отсюда следует, что в треугольнике ACE сумма углов также должна быть равна $\pi+\alpha$; кроме того, наименьший угол BAC треугольника ABC (предложение 9) перешел в новый треугольник ACE, причем он разбился на две части EAC и AEC. Продолжая таким же образом, разделяя при этом пополам каждый раз ту сторону, которая противолежит наименьшему углу, мы необходимо придем к треугольнику, сумма трех углов которого равна $\pi+\alpha$, но в котором окажутся два угла, каждый из которых по абсолютной величине меньше $\frac{1}{2}\alpha$; так как, однако, третий угол не может быть больше π, то α должно быть либо нулем, либо отрицательным [120].

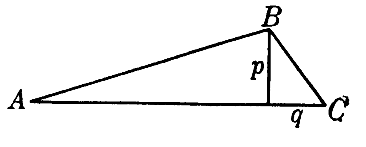


Черт. 4.

20) *Если в каком-либо прямолинейном треугольнике сумма трех углов равна двум прямым, то это имеет место и во всяком другом треугольнике* [121].

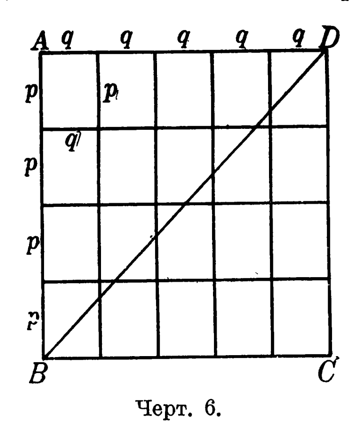
Положим, что в прямолинейном треугольнике ABC (черт. 5) сумма трех углов $=\pi$; в таком случае по крайней мере два его

угла должны быть острые. Из вершины B третьего угла опустим на противоположную сторону перпендикуляр p; тогда треугольник ABC разобьется на два прямоугольных треугольника, в каждом из которых сумма трех углов также должна быть равна π, ибо ни в одном из них она не может превышать π, а в составленном из них треугольнике она не должна быть меньше π [132].

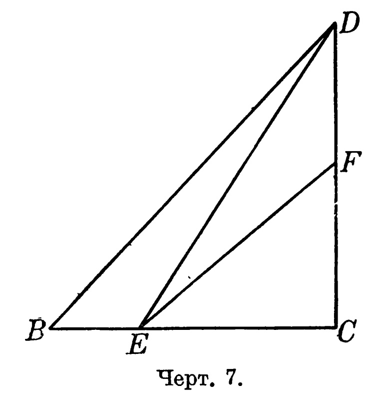


Черт. 5.

Таким образом мы получаем прямоугольный треугольник с катетами p и q, а из него [123] получаем четырехугольник, в котором противоположные стороны равны, а прилежащие друг к другу стороны p и q взаимно перпендикулярны (черт. 6). Повторно прикладывая тот же четырехугольник, можно получить подобный же четырехугольник со сторонами np и q и, наконец, четырехугольник $ABCD$ со взаимно перпендикулярными сторонами, в котором $AB = np$, $AD = mq$, $DC = np$, $BC = mq$, где m и n суть произвольные целые числа. Такой четырехугольник делится диагональю BD



Черт. 6.



Черт. 7.

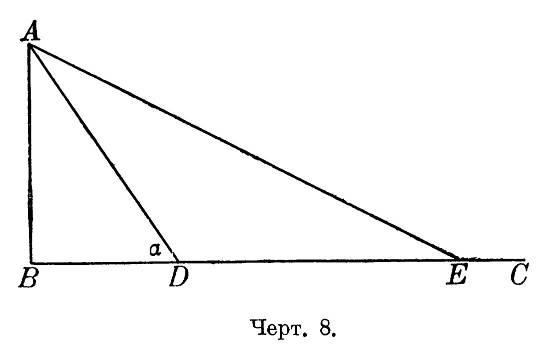
на два равных прямоугольных треугольника BAD и BCD, в каждом из которых сумма трех углов равна π [124]. Числа m и n могут быть выбраны так, чтобы прямоугольный треугольник BCD (черт. 7), катеты которого $CD = np$, $BC = mq$, охватил другой заданный [прямоугольный] треугольник EFC, коль скоро их прямые углы будут приведены в совмещение [125]. Если проведем линию DE, то получим еще прямоугольные треугольники, из которых каждые два последовательно имеют общую сторону [126]. Треугольник BCD получается путем соединения двух

треугольников BDE и DEC, ни в одном из которых сумма трех углов не может быть больше π; она должна быть поэтому равна π, поскольку в составленном треугольнике эта сумма должна быть равна π. Таким же образом треугольник EDC состоит из двух треугольников DEF и CFE; поэтому и в треугольнике CEF сумма трех углов должна быть равна π [127], и вообще это должно иметь место во всяком треугольнике, так как всякий треугольник разбивается на два прямоугольных треугольника [128].

Отсюда следует, что возможны только два допущения: либо сумма трех углов во всех прямолинейных треугольниках равна π, либо же она во всех треугольниках меньше π.

21) *Из данной точки всегда можно провести прямую линию таким образом, чтобы она образовала с данной прямой сколь угодно малый угол.*

Из данной точки A (черт. 8) опустим на данную прямую BC перпендикуляр AB; на BC возьмем произвольную точку D и проведем линию AD; далее, сделаем $DE = AD$ и проведем AE. Пусть в прямоугольном треугольнике ABD угол $ADB = \alpha$. В таком случае в равнобедренном треугольнике ADE угол AED должен быть либо равен $\frac{1}{2}\alpha$, либо меньше (предложения 8 и 19) [129]. Продолжая таким образом, мы, наконец, придем к такому углу AEB, который меньше любого заданного угла.

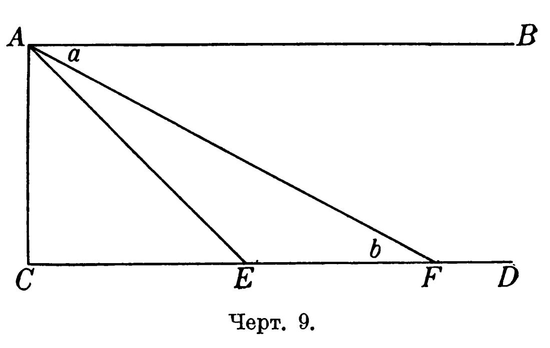


Черт. 8.

22) *Если два перпендикуляра к одной и той же прямой линии параллельны между собой, то в прямолинейных треугольниках сумма трех углов равна* π.

Положим, что линии AB и CD (черт. 9) параллельны между собой и перпендикулярны к AC. Из A проведем линии AE и AF к точкам E и F, взятым на линии CD на любых расстояниях $FC > EC$ от точки C. Допустим, что в прямоугольном треугольнике ACE сумма трех углов равна $\pi - \alpha$, а в треугольнике AEF она равна $\pi - \beta$ [130]; в таком случае в треугольнике ACF [сумма углов] будет равна $\pi - \alpha - \beta$, причем ни α, ни β не могут быть

отрицательными. Пусть, далее, угол $BAF = a$, $AFC = b$; в таком случае $\alpha + \beta = a - b$ [131]; теперь, удаляя линию AF от перпендикуляра AC, можно сделать угол a между AF и параллелью AB сколь угодно малым; так же можно уменьшать и угол b; следовательно, два угла α и β не могут иметь никакой другой величины, кроме $\alpha = 0$ и $\beta = 0$ [132].



Черт. 9.

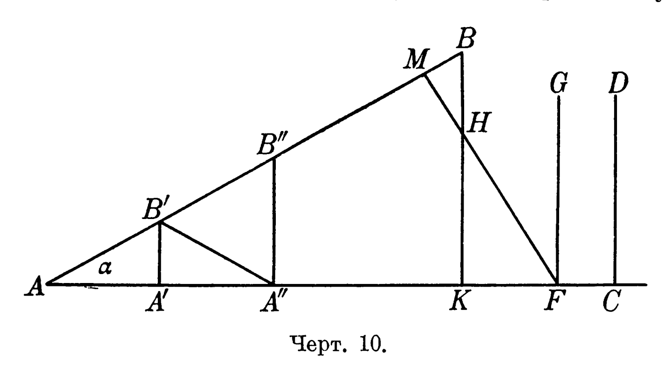
Отсюда следует, что во всех прямолинейных треугольниках сумма трех углов либо равна π, и тогда угол параллельности $\Pi(p) = \frac{1}{2}\pi$ для любой линии p, либо во всех треугольниках эта сумма $< \pi$, и тогда также $\Pi(p) < \frac{1}{2}\pi$.

Первое предположение служит основой *обыкновенной геометрии* и *плоской тригонометрии*. Второе предположение также может быть допущено, не приводя ни к какому противоречию в результатах; оно обосновывает новое геометрическое учение, которому я дал название «*воображаемая геометрия*» и которое я здесь намерен изложить вплоть до вывода уравнений между сторонами и углами прямолинейных и сферических треугольников [133].

IV. ИССЛЕДОВАНИЕ УГЛА ПАРАЛЛЕЛЬНОСТИ

23) *Для любого заданного угла* α *можно найти такую линию* p, *что* $\Pi(p) = \alpha$.

Пусть AB и AC (черт. 10) — две прямые линии, образующие при пересечении острый угол α; на AB возьмем произвольно точку B' и из этой точки опустим на AC перпендикуляр $B'A'$, сделаем $A'A'' = AA'$, восставим в A'' перпендикуляр $A''B''$ и так будем продолжать до тех пор, пока придем к перпендикуляру CD,



Черт. 10.

который уже не встречает AB. Это необходимо должно иметь место, ибо если в треугольнике $AA'B'$ сумма всех трех углов равна $\pi - a$, то в треугольнике $AB'A''$ она равна $\pi - 2a$, в треугольнике $AA''B''$ она меньше $\pi - 2a$ (предложение 19) [134] и т. п., пока она, наконец, не станет отрицательной и при этом обнаружит невозможность образования треугольника. Перпендикуляр CD может оказаться именно тем, до которого все перпендикуляры из точек, лежащих ближе к A, пересекают AB; во всяком случае при переходе от пересекающих к непересекающим такой перпендикуляр должен существовать [135]. Теперь из точки F проведем линию FH, образующую с FG острый угол HFG и именно с той стороны, с которой лежит точка A. Из какой-либо точки H линии FH опу-

стим на AC перпендикуляр HK, продолжение которого, следовательно, должно пересечь AB где-либо в B [136]; он образует, таким образом, треугольник AKB, внутрь которого входит продолжение линии FH, и потому оно должно встретить гипотенузу AB где-либо в M. Так как GFH есть произвольный угол и может быть взят сколь угодно малым, то линия FG параллельна AB и $AF=p$ (предложения 16 и 18).

Легко усмотреть, что с уменьшением p угол α возрастает, приближаясь при $p=0$ к $\frac{1}{2}\pi$ [137]; с возрастанием p угол α уменьшается, все более приближаясь к нулю при $p=\infty$. Так как совершенно произвольно, какой угол разуметь под символом $\Pi(p)$, когда линия p выражается отрицательным числом, то мы примем

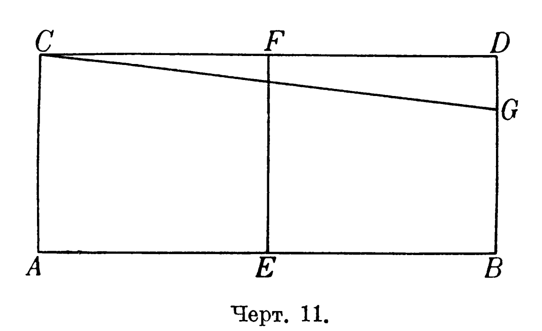
$$\Pi(p)+\Pi(-p)=\pi \ [138],$$

каковое равенство должно иметь место для всех значений p, как положительных, так и отрицательных, а также для $p=0$.

V. ВЗАИМНОЕ РАСПОЛОЖЕНИЕ ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ ЛИНИЙ

24) *Чем далее параллельные линии продолжаются в сторону параллельности, тем более они друг к другу приближаются.*

К прямой AB (черт. 11) восставим два перпендикуляра $AC = BD$ и конечные их точки соединим прямой линией [CD]. Тогда четырехугольник $CABD$ будет иметь два прямых угла при A и B, а при C и D — два острых угла (предложение 22) [139], которые

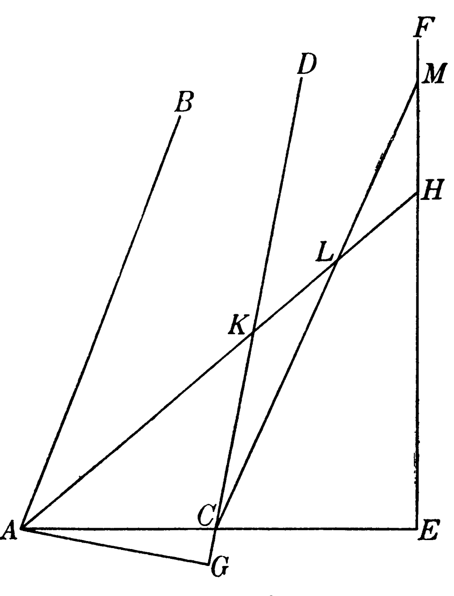


Черт. 11.

равны между собой, как в этом легко убедиться, налагая этот четырехугольник на самого себя так, чтобы линия BD упала на AC, а AC — на BD. Разделим AB пополам и в точке деления E восставим перпендикуляр EF к AB. Он должен быть также перпендикулярен к CD, потому что четырехугольники $CAEF$ и $FEBD$ покрывают друг друга, если наложим их друг на друга так, чтобы линия FE осталась в том же положении [140]. Вследствие этого линия CD не может быть параллельна AB, параллель же к последней в точке C, именно CG, должна быть наклонена в сторону AB (предложение 16) и отсечет от перпендикуляра BD часть $BG < CA$. Так как точка C выбрана на линии CG произвольно, то отсюда следует, что CG тем более приближается к AB, чем далее мы ее продолжаем [141].

25) *Две прямые линии, параллельные третьей, параллельны между собой.*

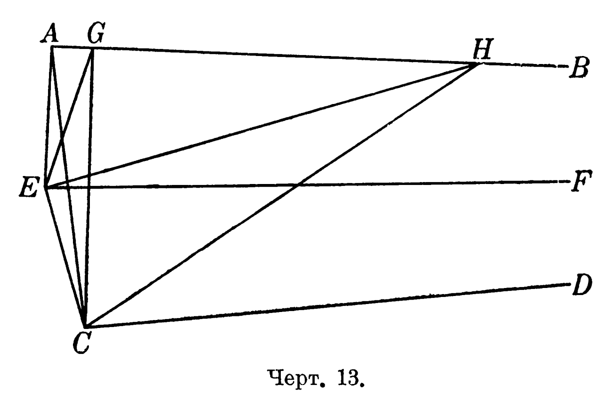
Примем сначала, что три линии AB, CD и EF (черт. 12) лежат в одной плоскости. Если две из них по порядку AB и CD параллельны крайней линии EF, то AB и CD также параллельны между собой [142]. Чтобы это обнаружить, опустим из произвольной точки A крайней линии AB на другую крайнюю FE перпендикуляр AE, который пересечет среднюю линию CD в некоторой точке C (предложение 3) под углом $DCE < \frac{1}{2}\pi$ со стороны параллели CD к EF (предложение 22) [143]. Перпендикуляр AG, опущенный из той же точки A на CD, должен упасть внутри отверстия острого угла ACG (предложение 9); всякая другая линия AH, проведенная из A внутри угла BAC, должна пересечь линию EF, параллельную AB, где-либо в H, сколь бы мал ни был угол BAH; следовательно, CD пересечет в треугольнике AEH линию AH где-либо в K, так как она не может встретиться с EF. Если бы AH проходила из точки A внутри угла CAG, то она должна была бы в треугольнике CAG пересечь продолжение CD где-либо между точками C и G. Отсюда следует, что AB и CD параллельны (предложения 16 и 18).



Черт. 12.

Если примем, что обе внешние линии AB и EF параллельны средней CD, то каждая линия AK, проведенная из точки A внутри угла BAE, пересечет линию CD где-либо в точке K, сколь бы мал ни был угол BAK. На продолжении AK возьмем произвольно точку L и соединим ее с C линией CL, которая пересечет EF где-либо в M, вследствие чего образуется треугольник MCE. Продолжение линии AL внутрь треугольника MCE не может вторично пересечь ни AC, ни CM; следовательно, оно должно встретить EF где-либо в H; поэтому AB и EF взаимно параллельны.

Пусть теперь параллели *AB* и *CD* (черт. 13) лежат в двух плоскостях, пересечение которых есть линия *EF* [144]. Из произвольной точки *E* последней опустим перпендикуляр *EA* на одну из двух параллелей, например на *AB*; затем из основания *A* перпендикуляра *EA* опустим вновь перпендикуляр *AC* на вторую параллель *CD* и соединим концы *E* и *C* обоих перпендикуляров линией *EC*. Угол *BAC* должен быть острым (предложение 22); следовательно, перпендикуляр *CG*, опущенный из *C* на *AB*, падает в точку *G* по ту сторону от *CA*, в которой считаем линии *AB* и *CD* параллельными. Каждая линия *EH*, сколь бы мало она ни отклонялась от *EF*, лежит с *EC* в плоскости, которая должна пересечь плоскость двух параллелей *AB* и *CD* вдоль некоторой линии *CH*. Эта последняя линия пересекает гделибо *AB*, и именно в той же точке *H*, которая принадлежит всем трем плоскостям и через которую необходимо проходит также линия *EH*; следовательно, *EF* параллельна *AB*. Подобным же образом можно обнаружить параллельность линий *EF* и *CD*.



Черт. 13.

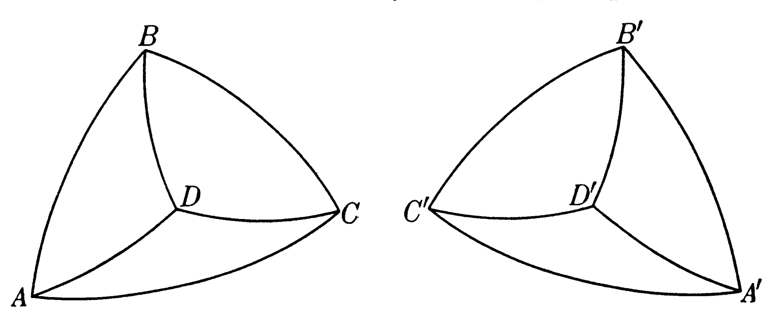
Сообразно этому предположение, что линия *EF* параллельна одной из двух других параллельных между собой линий *AB* и *CD*, означает не что иное, как то, что *EF* рассматривается как пересечение двух плоскостей, в которых лежат параллели *AB* и *CD*. Поэтому две линии параллельны между собой, если они параллельны одной и той же третьей линии, хотя бы они лежали и в различных плоскостях. Последнее предложение можно выразить также следующим образом: *три плоскости пересекаются по линиям, которые все между собой параллельны, поскольку предполагается параллельность двух из них.*

VI. ИЗМЕРЕНИЕ ТРЕХГРАННЫХ УГЛОВ

26) *На поверхности шара противолежащие друг другу треугольники имеют одинаковую площадь* [145].

Под противолежащими друг другу треугольниками мы разумеем здесь такие, которые образуются пересечением поверхности шара [теми же] плоскостями по обе стороны центра; в таких треугольниках стороны и углы имеют поэтому противоположные направления.

В противолежащих друг другу треугольниках ABC и $A'B'C'$ (черт. 14, на котором один из треугольников нужно себе представить изображенным в повернутом виде) стороны $AB = A'B'$,

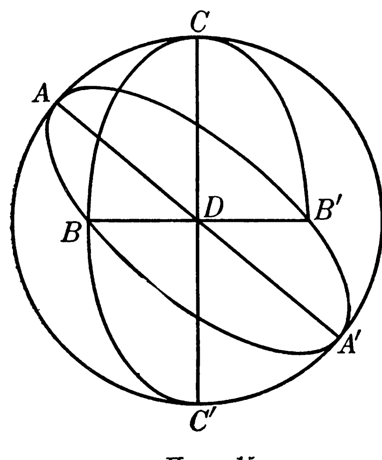


Черт. 14.

$BC = B'C'$, $CA = C'A'$ и их углы при точках A, B, C также равны соответствующим углам в другом треугольнике при точках A', B', C'. Представим себе плоскость, проходящую через три точки A, B, C, и перпендикуляр, опущенный на эту плоскость из центра шара; продолжения этого перпендикуляра в обе стороны пересекут противолежащие друг другу треугольники в точках D и D' шаровой поверхности. Расстояния точки D от точек A, B, C на сфере в дугах больших кругов должны быть равны (предложение 12) как между собой, так и расстояниям $D'A'$, $D'B'$,

$D'C'$ в другом треугольнике (предложение 6); следовательно, равнобедренные треугольники, расположенные вокруг точек D и D' в обоих сферических треугольниках ABC и $A'B'C'$ конгруэнтны друг другу.

Чтобы вообще судить о равенстве двух поверхностей [146], принимаю за основу следующее предложение: *две поверхности равны, если они образуются составлением или отделением равных частей.*



Черт. 15.

27) *Трехгранный телесный угол равен полусумме его двугранных углов без прямого* [147].

В сферическом треугольнике ABC (черт. 15), в котором каждая сторона $< \pi$, обозначим углы через A, B, C, продолжим сторону AB так, что образуется полный круг $ABA'B'A$, который разделит сферу на две равные части. В той половине, в которой находится треугольник ABC, продолжим еще две другие стороны за точку их взаимного пересечения C до их пересечений с кругом в A' и B'. Этим полусфера разобьется на четыре треугольника ABC, ACB', $B'CA'$, $A'CB$, величины которых пусть будут P, X, Y, Z. Ясно, что здесь [148]

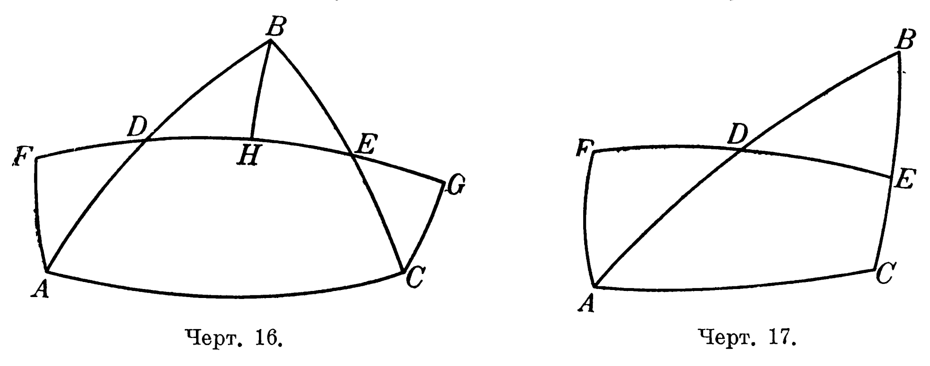
$$P+X=B,$$
$$P+Z=A.$$

Величина сферического треугольника Y равна величине противолежащего ему треугольника ABC', в котором сторона AB общая с треугольником P, а третий угол C' лежит при конечной точке диаметра сферы, идущего от C через центр сферы D (предложение 26). Отсюда следует, что $P+Y=C$; а так как $P+X+$ $+Y+Z=\pi$, то мы получаем также

$$P=\frac{1}{2}(A+B+C-\pi).$$

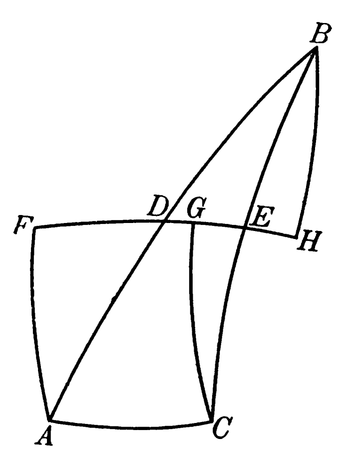
К тому же результату можно притти также и другим путем, опираясь только на предложение, приведенное выше относительно равенства площадей (предложение 26).

В сферическом треугольнике ABC (черт. 16) разделим стороны AB и BC пополам и через точки деления D и E проведем большой круг; из точек A, B, C опустим на этот круг перпендикуляры AF, BH и CG [149]. Если перпендикуляр из B падает в H между D и E, то образующийся таким образом треугольник BDH



Черт. 16. Черт. 17.

равен AFD, а BHE равен EGC (предложения 6 и 15 [150]); отсюда следует, что площадь треугольника ABC равна площади четырехугольника $AFGC$ (предложение 26) [151]. Если точка H совпадает с серединой E стороны BC (черт. 17), то образуются только два равных прямоугольных треугольника AFD и BDE, замещая которые друг другом, докажем равенство площадей треугольника ABC и четырехугольника $AFEC$. Если, наконец, точка H падает вне треугольника ABC (черт. 18), то мы перейдем от треугольника ABC к четырехугольнику $AFGC$, присоединяя треугольник $FAD = DBH$ и отнимая затем треугольник $CGE = EBH$.



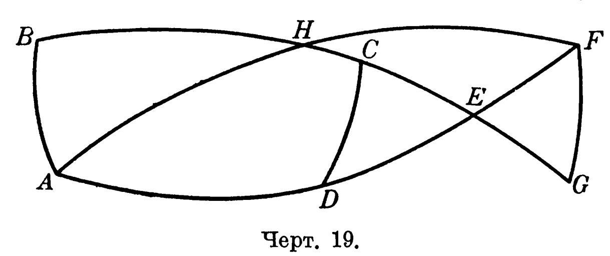
Черт. 18.

Если в сферическом четырехугольнике $AFGC$ представим себе большие круги, проходящие через точки A и G и через F и C, то дуги последних между AG и FC равны (предложение 15); поэтому конгруэнтны также треугольники FAC и ACG (предложение 15) [152], и угол FAC равен углу ACG.

Отсюда следует, что во всех предыдущих случаях сумма всех трех углов сферического треугольника равна сумме обоих равных не прямых углов в четырехугольнике. Таким образом, для каждого

сферического треугольника, в котором сумма трех углов есть S, можно найти четырехугольник с той же площадью, в котором имеются два прямых угла, две равные перпендикулярные [к основанию] стороны, а каждый из двух остальных углов равен $\frac{1}{2}S$ [153].

Пусть теперь $ABCD$ (черт. 19) будет сферический четырехугольник, в котором стороны $AB = DC$ перпендикулярны к BC и каждый из углов при A и D равен $\frac{1}{2}S$. Продолжим стороны AD и BC до их пересечения в E и далее за точку E, сделаем $DE = EF$ и на продолжение BC опустим перпендикуляр FG. Всю дугу BG разделим пополам и точку деления H соединим дугами больших кругов с A и F. Треугольники EFG и DCE конгруэнтны (предложение 15); следовательно, $FG = DC = AB$. Треугольники ABH и HGF также конгруэнтны, так как они — прямоугольные и имеют равные катеты; следовательно, дуги AH и HF принадлежат *одному* кругу, дуга AHF равна π, $ADEF$ также $= \pi$, угол $HAD = HFE = \frac{1}{2}S - BAH = \frac{1}{2}S - HFG = \frac{1}{2}S - HFE - EFG = \frac{1}{2}S - HAD - \pi + \frac{1}{2}S$; следовательно, угол $HFE = \frac{1}{2}(S - \pi)$, или, что то же, равен величине вырезка $AHFDA$, который в свою очередь равен четырехугольнику $ABCD$; это легко усмотреть, если перейти от одного к другому, прибавляя сначала к вырезку треугольник EFG, а затем треугольник BAH и отнимая после этого равные им треугольники DCE и HFG. Сообразно этому $\frac{1}{2}(S - \pi)$ есть величина четырехугольника $ABCD$, а вместе с тем и величина сферического треугольника, в котором сумма трех углов равна S.

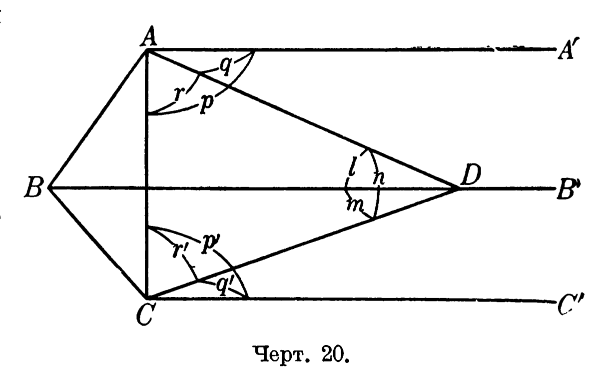


Черт. 19.

28) *Если три плоскости пересекаются по параллельным линиям, то сумма трех двугранных углов* [*ими образуемых*] *равна двум прямым.*

Пусть AA', BB', CC' (черт. 20) будут параллельные линии, образованные пересечением плоскостей (предложение 25) [154]. Возьмем на них произвольно три точки A, B, C и представим себе проходящую через них плоскость, которая, следовательно, пересекает плоскости параллелей по прямым линиям AB, AC

и BC. Затем через прямую AC и какую-либо точку D на линии BB' проведем еще одну плоскость, которая пересечет две плоскости параллелей AA' и BB', CC' и BB' по линиям AD и DC; наклонение этой плоскости к третьей плоскости параллелей AA' и CC' обозначим через w [155]. Углы между плоскостями, в которых лежат параллели, обозначим через X, Y, Z соответственно линиям AA', BB', CC'; пусть, далее, прямолинейные углы $BDC = a$, $ADC = b$, $ADB = c$. Представим себе описанную вокруг точки A как центра шаровую поверхность; ее пересечения с прямыми AC, AD, AA' определят сферический треугольник со сторонами p, q и r, площадь которого пусть будет α; в нем противолежат стороне q угол w, стороне r угол X, а следовательно, стороне p [противолежит угол] $\pi + 2\alpha - w - X$ [156] (предложение 27). Таким же образом прямые CA, CD, CC', пересекая шаровую поверхность вокруг центра C, определяют [на ней] треугольник величины β со сторонами p', q', r' и углами: w против q', Z против r' и, следовательно, $\pi + 2\beta - w - Z$ против p'. Наконец, пересечениями шаровой поверхности вокруг D с линиями DA, DB, DC определяется сферический треугольник со сторонами l, m, n, которым противолежат углы $w + Z - 2\beta$, $w + X - 2\alpha$ [157] и Y; следовательно, величина этого треугольника $\delta = \frac{1}{2}(X + Y + Z - \pi) - \alpha - \beta + w$. С уменьшением w уменьшается также величина треугольников α и β, так что $\alpha + \beta - w$ может быть сделано меньше любого данного числа. В треугольнике δ стороны l и m также могут быть уменьшаемы до уничтожения (предложение 21). Следовательно, треугольник δ может быть отложен одной из своих сторон l и m по большому кругу сферы сколько угодно раз и все-таки не заполнит полусферы; поэтому δ исчезает вместе с w [158]; отсюда следует, что необходимо должно быть $X + Y + Z = \pi$.

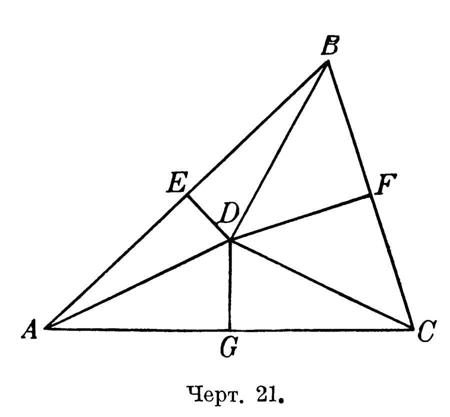


Черт. 20.

VII. ПРЕДЕЛЬНАЯ ЛИНИЯ

29) *В прямолинейном треугольнике перпендикуляры, восставленные из середин сторон, либо* [*вовсе*] *не встречаются, либо все три пересекаются в одной точке* [159].

Предположим, что в треугольнике ABC (черт. 21) перпендикуляры ED и FD, восставленные к сторонам AB и BC из их середин E и F, пересекаются в точке D; внутри углов треугольника проведем линии DA, DB, DC.



Черт. 21.

В равных треугольниках ADE и BDE (предложение 10) $AD=BD$; также заключаем, что $BD=CD$; следовательно, ADC есть равнобедренный треугольник, а потому перпендикуляр, опущенный из вершины D на основание AC, падает в середину последнего G.

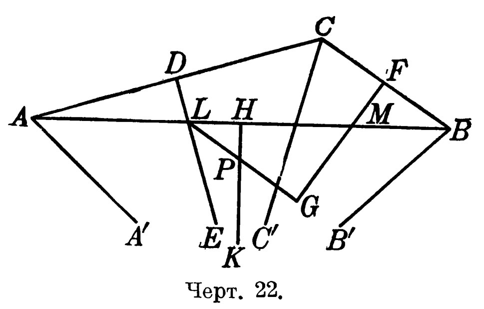
Доказательство не меняется и в том случае, если точка пересечения D двух перпендикуляров ED и FD падает на самую линию AC или вне треугольника.

Если поэтому примем, что два из этих перпендикуляров не пересекаются, то и третий не может с ними встретиться [160].

30) *Перпендикуляры, восставленные к сторонам прямолинейного треугольника из их середин, должны быть все три друг другу параллельны, если предположим параллельность двух из них* [161].

Пусть в треугольнике ABC (черт. 22) линии DE, FG, HK будут перпендикуляры, восставленные к его сторонам в их серединах D, F, H. Примем первоначально, что параллельны перпендикуляры DE и FG, которые пересекают линию AB в L и M [162]. Из

точки L проведем произвольно внутри угла BLE прямую линию LG, которая должна встретить FG где-либо в G, как бы мал ни был угол отклонения GLE (предложение 16) [163]. Так как в треугольнике LGM перпендикуляр HK не может встретиться с MG (предложение 29), то он должен встретить LG где-либо в P; отсюда следует, что HK должна быть параллельна DE [164] (предложение 16) и MG (предложения 18 и 25).



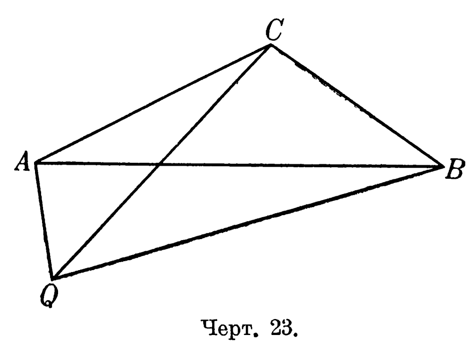
Черт. 22.

Если положим стороны $BC = 2a$, $AC = 2b$, $AB = 2c$, а противолежащие этим сторонам углы обозначим через A, B, C, то в рассмотренном сейчас случае

$$A = \Pi(b) - \Pi(c),$$
$$B = \Pi(a) - \Pi(c),$$
$$C = \Pi(a) + \Pi(b),$$

как в этом легко убедиться с помощью линий AA', BB', CC', которые проведены из точек A, B, C параллельно перпендикуляру HK, а следовательно, и двум другим перпендикулярам DE и FG; (предложения 23 и 25) [165].

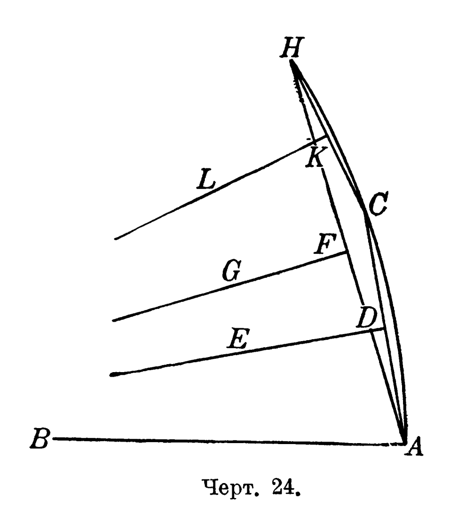
Положим теперь, что параллельны перпендикуляры HK и FG; в таком случае третий перпендикуляр DE не может их пересечь (предложение 29); следовательно, он либо параллелен им, либо пересекает AA' [166]. Последнее допущение означает не что иное, как то, что угол $C > \Pi(a) + \Pi(b)$ [167]. Если мы этот угол уменьшим так, чтобы он стал равен $\Pi(a) + \Pi(b)$, сообщая для этого линии AC новое положение CQ (черт. 23), и величину третьей стороны BQ обозначим через $2c'$, то угол CBQ при точке B, который возрос, должен, согласно доказанному выше, быть равен $\Pi(a) - \Pi(c') > \Pi(a) - \Pi(c)$, откуда следует $c' > c$ (предложение 23). Однако в треугольнике



Черт. 23.

ACQ углы при A и Q равны; поэтому в треугольнике ABQ угол при Q должен быть больше, чем при точке A, следовательно, $AB > BQ$ (предложение 9); это значит $c > c'$.

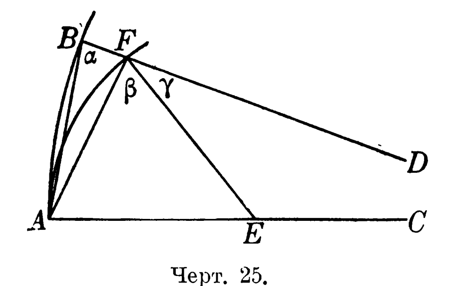
31) *Предельной линией* (*орициклом*) *мы называем такую расположенную в плоскости кривую линию, у которой все перпендикуляры, восставленные из середин ее хорд, параллельны между собой.*



Черт. 24.

В согласии с этим определением можно представить себе образование предельной линии, если будем проводить к данной прямой AB (черт. 24) из данной на ней точки A под различными углами $CAB = \Pi(a)$ отрезки $AC = 2a$; конец C такого отрезка будет лежать на предельной линии, точки которой можно таким образом постепенно определять. Перпендикуляр DE к хорде AC, восставленный из ее середины D, будет параллелен линии AB, которую мы будем называть *осью предельной линии*. Таким же образом каждый перпендикуляр FG, восставленный из середины какой-либо хорды AH, будет параллелен AB; поэтому это свойство должно принадлежать также каждому перпендикуляру KL, восставленному из середины K хорды CH, между какими бы двумя точками C и H предельной линии она ни была проведена (предложение 30). Этого рода перпендикуляры должны поэтому без отличия от AB называться *осями предельной линии* [168].

32) *Круг, радиус которого возрастает, переходит в предельную линию.*



Черт. 25.

Пусть AB (черт. 25) будет хорда предельной линии; из ее концов A и B проведем две оси AC и BD, которые, следовательно, образуют с хордой два равных угла $BAC = ABD = \alpha$ (предложение 31). На одной из этих осей AC возьмем где-либо точку E, примем ее за центр круга и проведем дугу круга AF от началь-

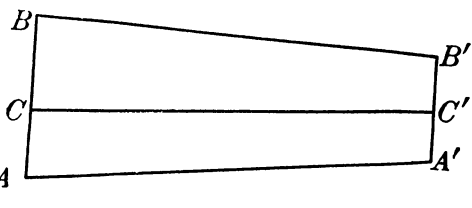
ной точки A оси AC до ее пересечения с другой осью BD в точке F. Соответствующий точке F радиус круга FE образует по одну сторону угол $AFE = \beta$ с хордой AF, а по другую сторону угол $EFD = \gamma$ с осью BD. Отсюда вытекает, что содержащийся между двумя хордами угол $BAF = \alpha - \beta < \beta + \gamma - \alpha$ [169] (предложение 22); следовательно, $\alpha - \beta < \frac{1}{2}\gamma$. Однако угол γ уменьшается до нуля как вследствие движения центра E при неизменном положении точки F (предложение 21) [170], так и вследствие приближения точки F к B по оси BF при неизменном положении центра E (предложение 22); отсюда следует, что при таком уменьшении угла γ исчезает также и угол $\alpha - \beta$, т. е. взаимное наклонение двух хорд AB и AF, а вместе с тем [исчезает] и расстояние точки B на предельной линии от точки F на круге [171].

Поэтому предельная линия может называться также *кругом с бесконечно большим радиусом*.

33) Пусть $AA' = BB' = x$ (черт. 26) будут две линии, параллельные в сторону от A к A', а их параллели служат осями двух предельных дуг (дуг на двух предельных линиях) $AB = s$, $A'B' = s'$; тогда

$$s' = se^{-x},$$

где e не зависит ни от дуг s и s', ни от прямой x, т. е. от расстояния дуги s' от s.



Черт. 26.

Чтобы это доказать, примем, что отношение дуги s к s' равно отношению двух целых чисел n и m. Между двумя осями AA', BB' проведем еще третью ось CC', которая, таким образом, отсекает от дуги AB часть $AC = t$, а от дуги $A'B'$ с той же стороны — часть $A'C' = t'$. Пусть теперь отношение t к s равно отношению двух целых чисел p и q, так что

$$s = \frac{n}{m} s'; \quad t = \frac{p}{q} s.$$

Разделим теперь s осями на nq равных частей; тогда таких частей окажется mq на s' и np на t. Между тем эти равные части на s и t соответствуют также равным частям на s' и t'; следовательно,

$$\frac{t'}{t} = \frac{s'}{s} \text{ [172]}.$$

Таким образом, где бы мы ни взяли две дуги t и t' между двумя осями AA' и BB', отношение t к t' остается то же, пока между ними остается то же расстояние x. Если поэтому для $x=1$ положим $s=es'$, то для любого x должно быть

$$s'=se^{-x}$$ [178].

Так как e есть неизвестное число, подчиненное только условию $e>1$, а, с другой стороны, единица для измерения длины x может быть выбрана произвольно, то последнюю можно для упрощения вычислений выбрать так, что под e можно будет разуметь основание неперовых логарифмов.

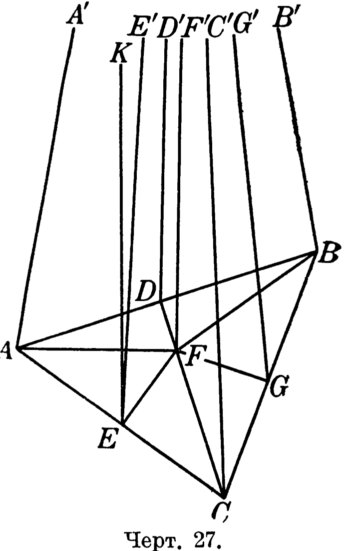
Здесь можно еще отметить, что $s'=0$ для $x=\infty$; поэтому расстояние между двумя параллелями (предложение 24) не только уменьшается, но при продолжении их в сторону параллелизма в конце концов (zuletzt) совершенно исчезает. Параллельные линии имеют, таким образом, характер асимптот.

VIII. ПРЕДЕЛЬНАЯ ПОВЕРХНОСТЬ

34) *Предельной поверхностью* (орисферой) называется поверхность, которая получается вращением предельной линии вокруг одной из своих осей, каковая вместе со всеми другими осями предельной линии будет также осью поверхности [174].

Хорда [предельной поверхности] *наклонена под равными углами к осям, проведенным через ее конечные точки, где бы на поверхности эти две точки ни были взяты.*

Пусть A, B, C (черт. 27) будут три точки на предельной поверхности, AA' пусть будет ось вращения, BB' и CC' — две другие оси; следовательно, AB и AC суть хорды, к которым оси наклонены под равными углами $A'AB = B'BA$, $A'AC = C'CA$ (предложение 31) [175]; две оси BB' и CC', проведенные через концы третьей хорды BC, также параллельны и лежат в одной плоскости (предложение 25). Перпендикуляр DD', восставленный из середины D хорды AB в плоскости двух параллелей, должен быть параллелен трем осям AA', BB', CC' (предложения 23 и 25) [176], такой же перпендикуляр EE' к хорде AC в плоскости параллелей AA', CC' будет параллелен трем осям AA', BB', CC' и перпендикуляру DD'. Угол между плоскостью, в которой расположены параллели AA' и BB', и плоскостью треугольника ABC обозначим через $\Pi(a)$, где a может быть числом положительным, отрицательным или нулем [177]. Если a положительно, то проведем $FD = a$ внутрь треугольника ABC в его плоскости перпендикулярно к хорде AB в ее середине D. Если a будет числом отрицательным, то нужно провести $FD = a$ вне треугольника по другую сторону хорды AB; если $a = 0$, то точка F сов-



Черт. 27.

падает с D. Во всех случаях получаем два равных прямоугольных треугольника AFD и DBF; следовательно, $FA = FB$. Теперь из точки F восставим перпендикуляр FF' к плоскости треугольника ABC.

Так как угол $D'DF = \Pi(a)$, $DF = a$, то линия FF' параллельна DD' и линии EE', с которой она поэтому также лежит в одной плоскости, перпендикулярной к плоскости треугольника ABC [178]. Если теперь представим себе перпендикуляр EK, восставленный к EF в плоскости параллелей EE' и FF', то он будет также перпендикулярен к плоскости треугольника ABC (предложение 13) и к лежащей в этой плоскости прямой AE (предложение 11); поэтому линия AE, перпендикулярная к EK и EE', будет также перпендикулярна к FE (предложение 11) [179]. Треугольники AEF и FEC равны, как прямоугольные с равными катетами; поэтому $AF = FC = FB$. Перпендикуляр из вершины F равнобедренного треугольника BFC на основание BC проходит через середину последнего G; плоскость, проходящая через этот перпендикуляр FG и линию FF', должна быть перпендикулярна к плоскости треугольника ABC и пересекать плоскость параллелей BB', CC' по линии GG', которая также параллельна AA' и BB' (предложение 25); так как теперь CG перпендикулярна к FG, а потому и к GG', то угол $C'CG = BB'G$ (предложение 23).

Отсюда следует, что для предельной поверхности каждая из ее осей может быть рассматриваема как ось поверхности.

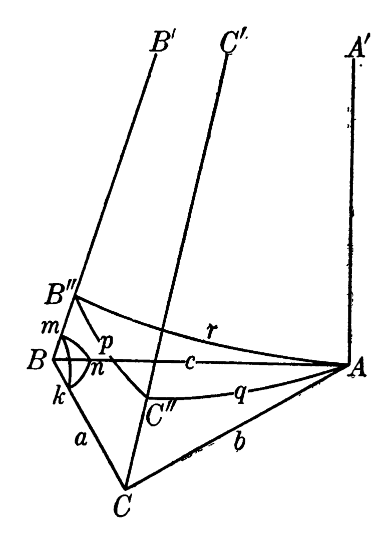
Главной плоскостью мы будем называть каждую плоскость, проведенную через ось предельной поверхности. Сообразно этому каждая *главная плоскость* сечет предельную поверхность по предельной линии, между тем как при другом положении секущей плоскости это пересечение есть круг [180]. Три главные плоскости, пересекающие друг друга, образуют друг с другом углы, сумма которых равна π (предложение 28). Эти углы мы будем рассматривать как углы в предельном треугольнике, сторонами которых служат дуги предельных линий, образуемых пересечением предельной поверхности этими тремя главными плоскостями [181]. В предельных треугольниках стороны и углы связаны поэтому теми же зависимостями, которые устанавливаются в обыкновенной геометрии для прямолинейных треугольников [182].

IX. УРАВНЕНИЯ, СВЯЗЫВАЮЩИЕ СТОРОНЫ И УГЛЫ ПРЯМОУГОЛЬНОГО ТРЕУГОЛЬНИКА

35) В дальнейшем мы будем обозначать величину линий буквой со штрихом, например x', чтобы указать, что таковая находится к другой линии, обозначаемой той же буквой без штриха, в соотношении, выраженном уравнением

$$\Pi(x) + \Pi(x') = \frac{1}{2}\pi \text{ [183]}.$$

Пусть теперь ABC (черт. 28) будет прямолинейный прямоугольный треугольник, в котором гипотенуза $AB = c$, катеты $AC = b$, $BC = a$, а противолежащие им углы суть $BAC = \Pi(\alpha)$, $ABC = \Pi(\beta)$ [184]. В точке A восставим перпендикуляр AA' к плоскости треугольника ABC и из точек B и C проведем BB' и CC' параллельно AA'. Плоскости, в которых эти три параллели лежат, образуют между собой углы $\Pi(\alpha)$ при AA', прямой при CC' [185] (предложения 11 и 13) и, следовательно, $\Pi(\alpha')$ при BB' (предложение 28).



Черт. 28.

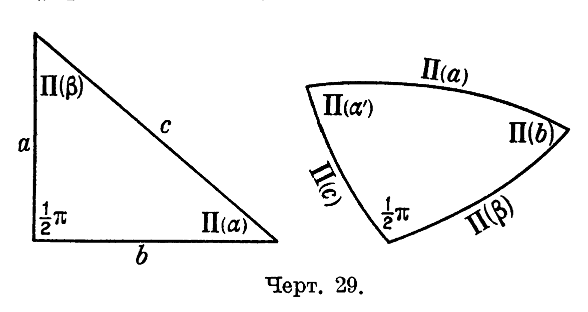
Пересечения линий BA, BC, BB' с шаровой поверхностью, описанной вокруг точки B как центра, определяют сферический треугольник mnk, в котором стороны $mn = \Pi(c)$, $kn = \Pi(\beta)$, $mk = \Pi(a)$, противолежащие же им углы суть $\Pi(b)$, $\Pi(\alpha')$, $\frac{1}{2}\pi$ [186].

Поэтому вместе с существованием прямолинейного треугольника со сторонами a, b, c и противолежащими им углами $\Pi(\alpha)$, $\Pi(\beta)$, $\frac{1}{2}\pi$ нужно допустить также существование сферического

треугольника (черт. 29) со сторонами $\Pi(c)$, $\Pi(\beta)$, $\Pi(a)$ и противолежащими углами

$$\Pi(b),\ \Pi(\alpha'),\ \frac{1}{2}\pi.$$

Но и, обратно, для этих двух треугольников существование сферического треугольника влечет за собой существование прямолинейного, который поэтому также может иметь стороны a, α', β и противолежащие им углы $\Pi(b')$, $\Pi(c)$, $\frac{1}{2}\pi$ [187].

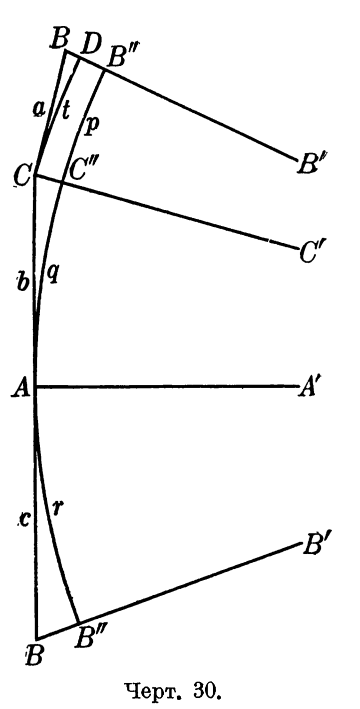


Черт. 29.

Поэтому от a, b, c, α, β можно перейти к b, a, c, β, α, а также к a, α', β, b', c.

Представим себе предельную поверхность, проходящую через точку A и имеющую осью линию AA' (черт. 28); эта поверхность пересечет две другие оси BB' и CC' в B'' и C'', а пересечения ее с плоскостями параллелей образуют предельный треугольник, стороны которого $B''C''=p$, $C''A=q$, $B''A=r$, противолежащие же им углы суть $\Pi(\alpha)$, $\Pi(\alpha')$, $\frac{1}{2}\pi$ [188], следовательно,

$$p = r\sin\Pi(\alpha), \quad q = r\cos\Pi(\alpha).$$



Черт. 30.

Теперь нарушим соединение трех главных плоскостей по линии BB' и развернем их таким образом, чтобы они вместе со всеми находящимися в них линиями расположились в одной плоскости; в этой плоскости дуги p, q, r соединятся в одну дугу предельной линии, проходящей через точку A и имеющей AA' своей осью (черт. 30) [189]; при этом по одну сторону оси AA' расположатся дуги q и p, сторона b треугольника, которая в точке A перпендикулярна к AA', — ось CC', идущая от конца стороны b параллельно AA' и проходящая через точку соединения C'' дуг p и q;

сторона a — перпендикулярная к CC' в точке C, а также выходящая из конца этой стороны ось BB', параллельная AA' и проходящая через конец B'' дуги p. По другую сторону AA' будут лежать: сторона c, перпендикулярная к AA' в точке A, и ось BB', параллельная AA' и идущая от конца стороны b через конечную точку B'' дуги r. Величина линии CC'' зависит от b, каковую зависимость мы выразим через $CC''=f(b)$. Таким же образом будет $BB''=f(c)$ [190].

Если, принимая CC'' за ось, проведем из точки C новую предельную линию до пересечения D с осью BB' и обозначим дугу CD через t, то

$$BD=f(a),\quad BB''=BD+DB''=BD+CC''$$

и, следовательно,

$$f(c)=f(a)+f(b).$$

Кроме того, мы замечаем (предложение 33), что

$$t=pe^{f(b)}=r\sin\Pi(\alpha)\,e^{f(b)}\quad [191].$$

Если бы перпендикуляр к плоскости треугольника ABC (черт. 28) был восставлен не в точке A, а в B, то линии c и r остались бы те же, дуги q и t перешли бы в t и q, прямые a и b в b и a, а угол $\Pi(\alpha)$ заменился бы углом $\Pi(\beta)$; следовательно, мы бы имели

$$q=r\sin\Pi(\beta)\,e^{f(a)}\quad [192];$$

подставляя вместо q [193] его значение, находим

$$\cos\Pi(\alpha)=\sin\Pi(\beta)\,e^{f(a)},$$

заменяя же α и β через b' и c:

$$\sin\Pi(b)=\sin\Pi(c)\,e^{f(a)},$$

и умножая на $e^{f(b)}$:

$$\sin\Pi(b)\,e^{f(b)}=\sin\Pi(c)\,e^{f(c)}.$$

Отсюда следует также:

$$\sin\Pi(a)\,e^{f(a)}=\sin\Pi(b)\,e^{f(b)}.$$

Так как, однако, прямые a и b друг от друга не зависят, а с другой стороны, при $b=0$ $f(b)=0$, $\Pi(b)=\frac{1}{2}\pi$, то для любой прямой линии a

$$e^{-f(a)}=\sin\Pi(a);$$

сообразно этому

$$\sin \Pi (c) = \sin \Pi (a) \sin \Pi (b),$$

$$\sin \Pi (\beta) = \cos \Pi (\alpha) \sin \Pi (a) \text{ [194]}.$$

Отсюда изменением букв получаем

$$\sin \Pi (\alpha) = \cos \Pi (\beta) \sin \Pi (b),$$

$$\cos \Pi (b) = \cos \Pi (c) \cos \Pi (\alpha),$$

$$\cos \Pi (a) = \cos \Pi (c) \cos \Pi (\beta) \text{ [195]}.$$

Если в сферическом прямоугольном треугольнике (черт. 29) [196] обозначим стороны $\Pi (c)$, $\Pi (\beta)$, $\Pi (a)$ с противолежащими им углами $\Pi (b)$, $\Pi (\alpha')$ буквами a, b, c, A, B, то найденные уравнения принимают форму, которая, как известно, устанавливается для прямоугольного треугольника в сферической тригонометрии, именно:

$$\sin a = \sin c \sin A,$$

$$\sin b = \sin c \sin B,$$

$$\cos A = \cos a \sin B,$$

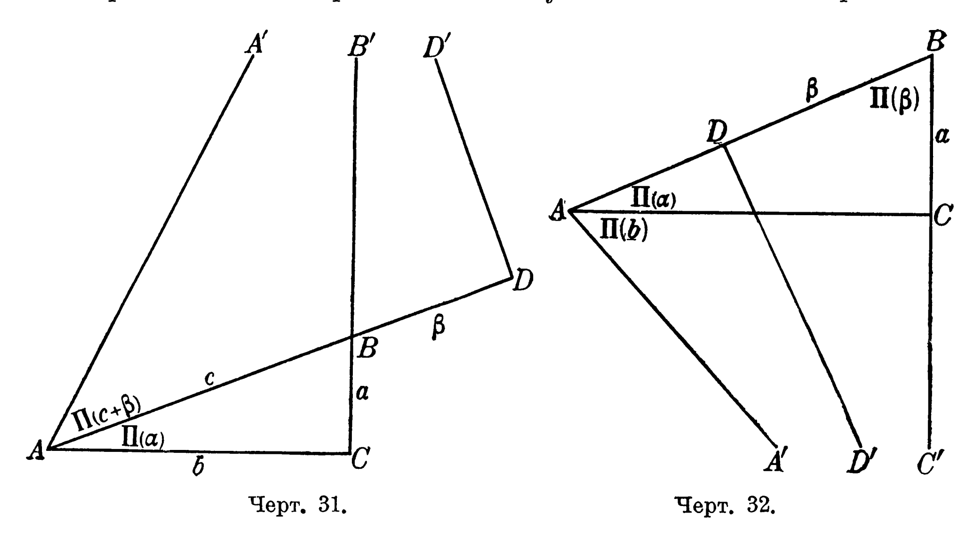
$$\cos B = \cos b \sin A,$$

$$\cos c = \cos a \cos b \text{ [197]};$$

от этих уравнений можно перейти к уравнениям любых сферических треугольников. Таким образом, сферическая тригонометрия не зависит от того, равна ли в прямолинейном треугольнике сумма трех углов двум прямым или нет.

X. РАЗЫСКАНИЕ ФУНКЦИИ $\Pi(x)$

36) Теперь рассмотрим снова прямолинейный прямоугольный треугольник ABC (черт. 31), стороны которого суть a, b, c, а противолежащие углы суть $\Pi(\alpha)$, $\Pi(\beta)$, $\frac{1}{2}\pi$. Продолжим гипотенузу c за точку B и сделаем $BD = \beta$; из точки D восставим к BD перпендикуляр DD', который, следовательно, будет параллелен BB', т. е. продолжению стороны a за точку B. Из точки A проведем



Черт. 31. Черт. 32.

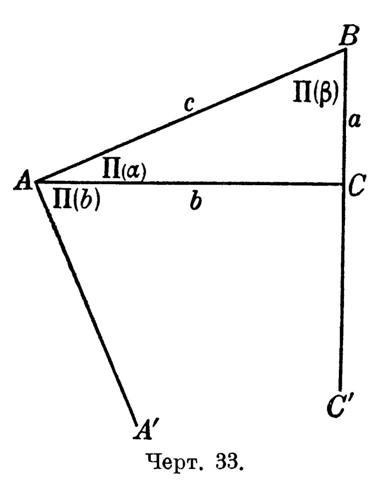
еще к DD' параллель AA', которая в то же время будет параллельна CB' (предложение 25). Поэтому угол $A'AD = \Pi(c+\beta)$, $A'AC = \Pi(b)$; следовательно,

$$\Pi(b) = \Pi(\alpha) + \Pi(c+\beta).$$

Если отложим β на гипотенузе c от точки B, затем из конечной точки D (черт. 32) [198] восставим к AB внутрь треугольника перпендикуляр DD' и из точки A проведем AA' параллельно DD', то BC с ее продолжением CC' будет третьей параллелью; тогда угол $CAA' = \Pi(b)$, $DAA' = \Pi(c-\beta)$; следовательно,

$$\Pi(c-\beta) = \Pi(\alpha) + \Pi(b).$$

Последнее уравнение остается в силе и в том случае, когда $c=\beta$ или $c<\beta$. Если $c=\beta$ (черт. 33), то перпендикуляр AA', восставленный к AB из точки A, параллелен стороне $BC=a$ с ее продолжением CC'; следовательно $\Pi(\alpha)+\Pi(b)=\frac{1}{2}\pi$ и в то же время $\Pi(c-\beta)=\frac{1}{2}\pi$ (предложение 23) [199]. Если $c<\beta$ (черт. 34), то конец отрезка β падает по другую сторону точки A в D на продолжении гипотенузы AB. Восставленный отсюда перпендикуляр DD' к AD и параллельная ему линия AA' из точки A будут также параллельны стороне $BC=a$ с ее продолжением CC'. Здесь угол $DAA'=$ $=\Pi(\beta-c)$, следовательно, $\Pi(\alpha)+\Pi(b)=$ $=\pi-\Pi(\beta-c)=\Pi(c-\beta)$ (предложение 23).



Черт. 33.

Приведя в связь оба найденных уравнения, получаем

$$2\Pi(b)=\Pi(c-\beta)+\Pi(c+\beta),$$

$$2\Pi(\alpha)=\Pi(c-\beta)-\Pi(c+\beta),$$

откуда следует

$$\frac{\cos\Pi(b)}{\cos\Pi(\alpha)}=$$

$$=\frac{\cos\left[\frac{1}{2}\Pi(c-\beta)+\frac{1}{2}\Pi(c+\beta)\right]}{\cos\left[\frac{1}{2}\Pi(c-\beta)-\frac{1}{2}\Pi(c+\beta)\right]}.$$

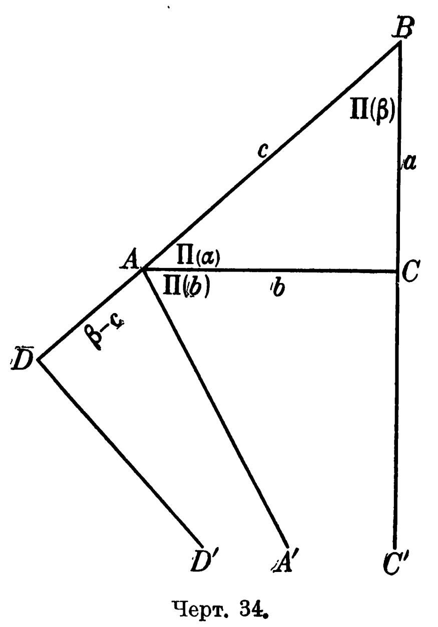
Если сюда подставим значение (предложение 35)

$$\frac{\cos\Pi(b)}{\cos\Pi(\alpha)}=\cos\Pi(c),$$

то получим

$$\operatorname{tg}\frac{1}{2}\Pi(c)^2=$$

$$=\operatorname{tg}\frac{1}{2}\Pi(c-\beta)\operatorname{tg}\frac{1}{2}\Pi(c+\beta)\ [200].$$



Черт. 34.

Здесь β есть произвольное число, так как угол $\Pi(\beta)$ с одной стороны [гипотенузы] c может быть выбран произвольно в пределах от 0 до $\frac{1}{2}\pi$; следовательно, β [может быть выбрано] произвольно между 0 и ∞; полагая здесь по порядку $\beta=c$, $2c$, $3c$ и т. д.,

для любого положительного числа n получим:

$$\left[\operatorname{tg}\frac{1}{2}\Pi(c)\right]^n = \operatorname{tg}\frac{1}{2}\Pi(nc)\ [201].$$

Если будем здесь рассматривать n как отношение двух линий x и c и примем, что

$$\operatorname{ctg}\frac{1}{2}\Pi(c) = e^c,$$

то получим вообще для любой линии x, как положительной, так и отрицательной,

$$\operatorname{tg}\frac{1}{2}\Pi(x) = e^{-x}\ [202], \qquad [\Pi]$$

где e может быть любое число, большее единицы, ибо $\Pi(x) = 0$ при $x = \infty$.

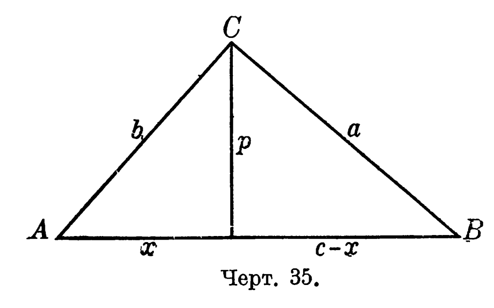
Так как единица, которой измеряются линии, произвольна, то за e можно также принять основание неперовых логарифмов [203].

XI. УРАВНЕНИЯ, СВЯЗЫВАЮЩИЕ СТОРОНЫ И УГЛЫ ВСЯКОГО ТРЕУГОЛЬНИКА

37) Из найденных выше уравнений достаточно знать два следующих:

$$\sin \Pi (c) = \sin \Pi (a) \sin \Pi (b),$$
$$\sin \Pi (\alpha) = \sin \Pi (b) \cos \Pi (\beta),$$

относя последнее к обоим катетам a и b, чтобы из их соединения вывести два остальных (предложение 35) и притом без двузначности относительно алгебраических знаков, ибо углы здесь острые [204]. Аналогичным образом приходим к двум уравнениям [205]:



Черт. 35.

1. $\operatorname{tg} \Pi (c) = \sin \Pi (\alpha) \operatorname{tg} \Pi (a),$
2. $\cos \Pi (a) = \cos \Pi (c) \cos \Pi (\beta).$

Рассмотрим теперь прямолинейный треугольник со сторонами a, b, c и противолежащими углами A, B, C (черт. 35). Если A и B суть острые углы, то перпендикуляр p из вершины угла C падает внутрь треугольника и делит сторону c на две части, именно: на часть x со стороны угла A и $c-x$ со стороны угла B. Таким образом получаются два прямоугольных треугольника, применяя к которым уравнение (1), получаем

$$\operatorname{tg} \Pi (a) = \sin B \operatorname{tg} \Pi (p),$$
$$\operatorname{tg} \Pi (b) = \sin A \operatorname{tg} \Pi (p),$$

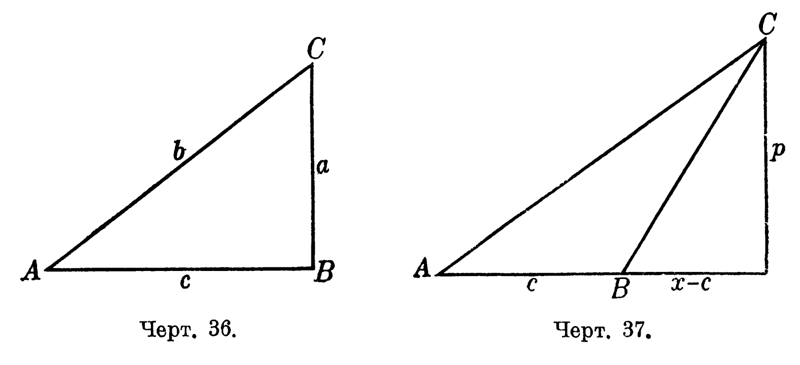
каковые уравнения остаются без изменения, даже если бы один из углов, например B, был прямым (черт. 36) или тупым (черт. 37). Таким образом получаем общее для всех треугольников соотношение

3. $\sin A \operatorname{tg} \Pi (a) = \sin B \operatorname{tg} \Pi (b)$ [206].

Для треугольника с острыми углами A, B (черт. 35) получаем еще [уравнение (2)]

$$\left.\begin{aligned}\cos\Pi(x) &= \cos A \cos\Pi(b),\\ \cos\Pi(c-x) &= \cos B \cos\Pi(a),\end{aligned}\right\}\qquad [a]\ [207]$$

каковые уравнения относятся также к треугольникам, в которых угол A или B прямой или тупой. Например при $B=\frac{1}{2}\pi$ (черт. 36) нужно взять $x=c$; первое уравнение переходит тогда в то, кото-



Черт. 36. Черт. 37.

рое мы получили выше [уравнение (2)], а второе удовлетворяется само по себе [208]. При $B>\frac{1}{2}\pi$ (черт. 37) первое уравнение остается без изменения, вместо же второго нужно написать соотношение

$$\cos\Pi(x-c)=\cos(\pi-B)\cos\Pi(a);$$

но $\cos\Pi(x-c)=-\cos\Pi(c-x)$ (предложение 23), а также

$$\cos(\pi-B)=-\cos B.$$

Если A есть прямой или тупой угол, то вместо x и $c-x$ нужно взять $c-x$ и x, и этот случай приведется к предыдущим [209].

Чтобы из этих двух уравнений исключить x, заметим, что (предложение 36)

$$\cos\Pi(c-x)=\frac{1-\operatorname{tg}\frac{1}{2}\Pi(c-x)^2}{1+\operatorname{tg}\frac{1}{2}\Pi(c-x)^2}=\frac{1-e^{2x-2c}}{1+e^{2x-2c}}=$$

$$=\frac{1-\operatorname{tg}\frac{1}{2}\Pi(c)^2\operatorname{ctg}\frac{1}{2}\Pi(x)^2}{1+\operatorname{tg}\frac{1}{2}\Pi(c)^2\operatorname{ctg}\frac{1}{2}\Pi(x)^2}=\frac{\cos\Pi(c)-\cos\Pi(x)}{1-\cos\Pi(c)\cos\Pi(x)}\ [210].\qquad [б]$$

Если подставим сюда выражения для $\cos\Pi(x)$, $\cos\Pi(c-x)$, то получим

$$\cos\Pi(c)=\frac{\cos\Pi(a)\cos B+\cos\Pi(b)\cos A}{1+\cos\Pi(a)\cos\Pi(b)\cos A\cos B},\qquad [в]$$

откуда следует

$$\cos \Pi(a) \cos B = \frac{\cos \Pi(c) - \cos A \cos \Pi(b)}{1 - \cos A \cos \Pi(b) \cos \Pi(c)}$$

и, наконец,

$\sin \Pi(c)^2 = [1 - \cos B \cos \Pi(c) \cos \Pi(a)] \cdot [1 - \cos A \cos \Pi(b) \cos \Pi(c)]$ [211].

Таким же образом должно быть

4. $\sin \Pi(a)^2 = [1 - \cos C \cos \Pi(a) \cos \Pi(b)] \cdot [1 - \cos B \cos \Pi(c) \cos \Pi(a)]$,

$\sin \Pi(b)^2 = [1 - \cos A \cos \Pi(b) \cos \Pi(c)] \cdot [1 - \cos C \cos \Pi(a) \cos \Pi(b)]$.

Из этих трех уравнений получаем еще

$$\frac{\sin \Pi(b)^2 \sin \Pi(c)^2}{\sin \Pi(a)^2} = [1 - \cos A \cos \Pi(b) \cos \Pi(c)]^2.$$

Отсюда без двузначности по отношению к знакам [212] имеем:

5. $$\cos A \cos \Pi(b) \cos \Pi(c) + \frac{\sin \Pi(b) \sin \Pi(c)}{\sin \Pi(a)} = 1.$$

Если сюда в согласии с уравнением (3) подставим значение $\sin \Pi(c)$:

$$\sin \Pi(c) = \frac{\sin A}{\sin C} \operatorname{tg} \Pi(a) \cos \Pi(c)$$ [213],

то получим

$$\cos \Pi(c) = \frac{\cos \Pi(a) \sin C}{\sin A \sin \Pi(b) + \cos A \sin C \cos \Pi(a) \cos \Pi(b)}$$

или же, подставляя это выражение для $\cos \Pi(c)$ в уравнение (4),

6. $$\operatorname{ctg} A \sin C \sin \Pi(b) + \cos C = \frac{\cos \Pi(b)}{\cos \Pi(a)}$$ [214].

Исключая отсюда $\sin \Pi(b)$ с помощью уравнения (3), получаем

$$\frac{\cos \Pi(a)}{\cos \Pi(b)} \cos C = 1 - \frac{\cos A}{\sin B} \sin C \sin \Pi(a)$$ [215].

Между тем, уравнение (6) изменением букв дает

$$\frac{\cos \Pi(a)}{\cos \Pi(b)} = \operatorname{ctg} B \sin C \sin \Pi(a) + \cos C.$$

Из двух последних уравнений следует

7. $$\cos A + \cos B \cos C = \frac{\sin B \sin C}{\sin \Pi(a)}$$ [216].

Все четыре уравнения, выражающие зависимости между сторонами a, b, c и противолежащими углами A, B, C, согласно этому (уравнения (3), (5), (6), (7)) будут

$$8. \quad \begin{cases} \sin A \operatorname{tg} \Pi(a) = \sin B \operatorname{tg} \Pi(b), \\ \cos A \cos \Pi(b) \cos \Pi(c) + \dfrac{\sin \Pi(b) \sin \Pi(c)}{\sin \Pi(a)} = 1, \\ \operatorname{ctg} A \sin C \sin \Pi(b) + \cos C = \dfrac{\cos \Pi(b)}{\cos \Pi(a)}, \\ \cos A + \cos B \cos C = \dfrac{\sin B \sin C}{\sin \Pi(a)} \end{cases}$$ [217].

Если стороны треугольника a, b, c очень малы, то можно удовольствоваться приближенными значениями (предложение 36):

$$\operatorname{ctg} \Pi(a) = a,$$
$$\sin \Pi(a) = 1 - \frac{1}{2} a^2,$$
$$\cos \Pi(a) = a$$ [218]

и аналогично для других сторон b и c. Уравнения (8) переходят для таких треугольников в следующие:

$$b \sin A = a \sin B,$$
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A,$$
$$a \sin(A + C) = b \sin A,$$
$$\cos A + \cos(B + C) = 0$$ [219].

Из этих уравнений первые два приняты в обыкновенной геометрии; последние же с помощью двух первых приводят к заключению, что

$$A + B + C = \pi$$ [220].

Таким образом, воображаемая геометрия переходит в обыкновенную, если предположим, что стороны прямолинейного треугольника очень малы [221].

Об измерении кривых линий, площадей плоских фигур, поверхностей и объемов тел, равно как и о применении воображаемой геометрии к анализу я опубликовал некоторые исследования в «Ученых записках Казанского университета» [222].

Уравнения (8) уже сами по себе представляют достаточную основу для того, чтобы рассматривать предположения воображаемой геометрии как возможные. Сообразно этому мы не располагаем никаким другим средством, кроме астрономических наблюдений,

чтобы судить о точности, которую дают вычисления обыкновенной геометрии. Как я показал в одной из моих работ, эта точность простирается далеко, так что, например, в треугольниках, стороны которых доступны нашим измерениям, сумма углов не отличается от двух прямых даже на сотую долю секунды.

Замечательно также, что уравнения (8) в плоской геометрии переходят в уравнения сферических треугольников, если вместо сторон a, b, c подставим $a\sqrt{-1}$, $b\sqrt{-1}$, $c\sqrt{-1}$; при таком изменении, однако, нужно будет также положить

$$\sin \Pi(a) = \frac{1}{\cos a},$$
$$\cos \Pi(a) = \sqrt{-1} \operatorname{tg} a,$$
$$\operatorname{tg} \Pi(a) = \frac{1}{\sin a \sqrt{-1}};$$

подобные же изменения нужно сделать и для сторон b, c; этим путем мы придем от уравнений (8) к следующим:

$$\sin A \sin b = \sin B \sin a,$$
$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A,$$
$$\operatorname{ctg} A \sin C + \cos C \cos b = \sin b \operatorname{ctg} a,$$
$$\cos A = \cos a \sin B \sin C - \cos B \cos C \text{ [223]}.$$



ПАНГЕОМЕТРИЯ



III.

PANGÉOMÉTRIE

OU

PRÉCIS DE GÉOMÉTRIE

FONDÉE

SUR UNE THÉORIE GÉNÉRALE ET RIGOUREUSE

DES

PARALLÈLES

PAR

N. Lobatcheffsky,

Professeur emerite de Luniversité de Kasan et membre honoraire de Luniversité de Moscou.

Титульный лист статьи Лобачевского «Пангеометрия». Помещен в «Сборнике статей», посвященном пятидесятилетию Казанского университета.

ПАНГЕОМЕТРІЯ.

Заслуж. Профессора Н. И. Лобачевскаго.

Понятія, на которыхъ основываютъ начала геометріи недостаточны чтобъ отсюда вывести доказательство теоремы: сумма трехъ угловъ прямолинейнаго треугольника равна двумъ прямымъ; теорема, въ справедливости которой никто до сихъ поръ не сомнѣвался, потому что не встрѣчаютъ ни какого противорѣчія въ заключеніяхъ, которыя отсюда выводятся и потому что измѣреніе угловъ, въ прямолинейныхъ треугольникахъ согласуется въ предѣлахъ ошибокъ самыхъ точныхъ измѣреній съ этой теоремой. Недостаточность начальныхъ понятій для доказательства приведенной теоремы принудила геометровъ допускать прямо или косвенно вспомогательныя положенія, которыя какъ ни просты кажутся, тѣмъ не менѣе произвольны и слѣдовательно допущены быть не могутъ. Такъ напр. принимаютъ: что кругъ съ безконечно великимъ полупоперечникомъ переходитъ въ прямую линію, а сфера съ безконечно великимъ полупоперечникомъ въ плоскость: что углы прямолинейнаго треугольника зависятъ только отъ содержанія боковъ, но не отъ самыхъ боковъ, или наконецъ, какъ это обыкновенно принимаютъ въ началахъ геометріи, что изъ данной точки въ плоскости не можно провести болѣе, одной прямой параллельной съ данной прямою въ той же плоскости, тогда какъ всѣ другія прямыя, проведенныя изъ той же точки и въ той же плоскости, должны необходимо по достаточномъ продолженіи пересѣкать данную прямую. Подъ линіею параллельной другой, разумѣютъ прямую линію, которая сколько бы не продолжалась въ обѣ стороны, никогда не встрѣчаетъ ту, съ которой она параллельна. Это опредѣленіе само по

Первая страница оригинального издания сочинения «Пангеометрия».
(1-я страница книжки I «Ученых записок Казанского университета» за 1855 год.)

I. ВСТУПЛЕНИЕ

1. Понятия, на которых основывают начала геометрии, недостаточны, чтоб отсюда вывести доказательство теоремы: сумма трех углов прямолинейного треугольника равна двум прямым; теорема, в справедливости которой никто до сих пор не сомневался, потому что не встречают никакого противоречия в заключениях, которые отсюда выводятся, и потому что измерение углов в прямолинейных треугольниках согласуется в пределах ошибок самых точных измерений с этой теоремой. Недостаточность начальных понятий для доказательства приведенной теоремы принудила геометров допускать прямо или косвенно вспомогательные положения, которые как ни просты кажутся, тем не менее произвольны и следовательно допущены быть не могут. Так например, принимают: что круг с бесконечно великим полупоперечником переходит в прямую линию, а сфера с бесконечно великим полупоперечником — в плоскость; что углы прямолинейного треугольника зависят только от содержания [224] боков, но не от самых боков, или наконец, как это обыкновенно принимают в началах геометрии, что из данной точки в плоскости не можно провести более одной прямой параллельной с данной прямою в той же плоскости, тогда как все другие прямые, проведенные из той же точки и в той же плоскости, должны необходимо по достаточном продолжении пересекать данную прямую. Под линиею параллельной другой разумеют прямую линию, которая сколько бы не продолжалась в обе стороны, никогда не встречает ту, с которой она параллельна. Это определение само по себе недостаточно, потому что оно не указывает на единственную линию. То же можно сказать о большей части определений, даваемых в началах геометрии, потому что эти определения не только не указывают на происхождение геометрической величины, которую хотят

определить, но даже не доказывают, что такие величины существовать могут. Таким образом определяют прямую линию и плоскость некоторыми их свойствами; говорят, что прямые линии суть те, которые сливаются, как скоро у них две общие точки; что плоскость есть такого рода поверхность, в которой прямая линия лежит вся, как скоро проведена чрез две точки, взятые на плоскости.

Вместо того, чтобы начинать геометрию прямой линиею и плоскостью, как это делают обыкновенно, я предпочел начать сферой и кругом [225], которых определение не подлежит упреку в неполноте, потому что в этих определениях заключается способ каким образом эти величины происходят. Потом я определяю плоскость, как поверхность, где пересекаются равные сферы, описанные около двух постоянных точек. Наконец определяю прямую линию, как пересечение равных кругов в плоскости, описанных около двух постоянных точек той же плоскости. Допустив такие определения, вся теория прямых и плоскостей перпендикулярных может быть изложена строго с легкостью и краткостью. Прямую, проведенную из данной точки в плоскости, я называю *параллельною* к данной прямой в той же плоскости, как скоро она составляет границу между теми прямыми, проведенными из той же точки в той же плоскости, которые пересекают данную прямую по достаточному продолжению, и тех, которые не пересекают, сколько бы ни продолжались. Ту сторону, в которой пересечение происходит, я называю *стороною параллельности*.

Я издал полную теорию параллельных под заглавием «Geometrische Untersuchungen zur Theorie der Parallellinien. Berlin 1840. In der Finke'schen Buchhandlung» [226]. В этом сочинении я изложил доказательства всех предложений, в которых не нужно прибегать к помощи параллельных линий. Между этими предложениями то, которое дает отношение поверхности сферического треугольника ко всей сфере, особенно достойно замечания (Geometr. Untersuchungen § 27). Если A, B, C означают углы сферического треугольника, то содержание поверхности этого сферического треугольника к поверхности всей сферы [227], которой он принадлежит, будет равно содержанию

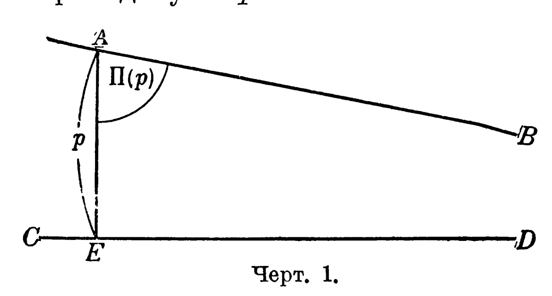
$$\frac{1}{2}(A+B+C-\pi)$$

к четырем прямым углам. Здесь π означает два прямых угла. Потом я доказываю, что сумма трех углов в прямолинейном треугольнике не может быть более двух прямых углов (Geometr. Unters. § 19), и если эта сумма равна двум прямым углам в каком-нибудь прямолинейном треугольнике, то она должна быть такова во всех прямолинейных треугольниках (Geometr. Unters. § 20).

Итак два только предположения возможны: или сумма трех углов во всяком прямолинейном треугольнике равна двум прямым углам — это предположение составляет обыкновенную геометрию — или во всяком прямолинейном треугольнике эта сумма менее двух прямых, и это последнее предположение служит основанием особой геометрии, которой я дал название воображаемой геометрии, но которую может быть приличнее назвать *Пангеометрией*, потому что это название означает геометрию в обширном виде, где обыкновенная геометрия будет частный случай.

II. ОСНОВНЫЕ ПРЕДЛОЖЕНИЯ

2. Из принятых начал в пангеометрии следует, что перпендикул p, опущенный из одной точки прямой линии на параллельную к ней, делает с первой линией два угла, из которых один острый. Я называю этот угол *углом параллельности*, а сторону первой из этих прямых линий, где острый угол находится, и которая остается та же для всех точек на прямой, *стороной параллельности*. Я означаю этот угол $\Pi(p)$ (черт. 1), потому что он зависит от длины перпендикула p. В обыкновенной геометрии $\Pi(p) = \frac{\pi}{2}$ для всякого p. В пангеометрии углу $\Pi(p)$ принадлежат все значения от 0, которому соответствует $p = \infty$, до $\frac{\pi}{2}$, которому соответствует $p=0$. (Geometr. Unters. § 23). Чтобы функции $\Pi(p)$ дать аналитическое значение более общее, я принимаю, что для отрицательных p, случай на который первое определение не распространяется, значение этой функции дается уравнением: $\Pi(p) + \Pi(-p) = \pi$ [223].

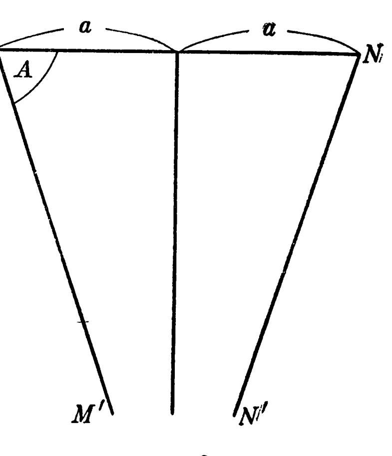


Черт. 1.

Итак для всякого угла $A > 0$ и $< \pi$ можно найти линию p так, что $\Pi(p) = A$, где линия p положительна, если $A < \frac{\pi}{2}$. Обратно, для всякой линии p существует угол A так, что $A = \Pi(p)$.

Я называю *предельным кругом* [229] такой круг, которого полупоперечник принимаю бесконечно великим; он может быть начерчен постепенно точками к нему принадлежащими. Берем точку [M] на данной прямой (черт. 2), называем эту точку *вершиной*, а самую прямую [MM'] — *осью* предельного круга; построим на этой прямой угол $A \geqq 0$ и $\leqq \frac{\pi}{2}$, вершина которого совпадает с вершиною предельного круга, и которого одна из сторон совпадает с осью;

пусть наконец a — линия, которая даст $\Pi(a) = A$, и кладем на другой бок угла A от вершины прямую $2a$, конец $[N]$ этой прямой будет лежать на предельном круге; чтобы продолжить предельный круг по другую сторону оси, надобно повторить то же построение на этой стороне оси. Отсюда видно, что все прямые параллельные с осью предельного круга могут равно почитаться за оси предельного круга [230].



Черт. 2.

Обращение [231] предельного круга около одной из его осей производит поверхность, которую я называю *предельная сфера* [232], поверхность, которая, следовательно, будет граница приближения для сферы с возрастанием полупоперечников до бесконечности.

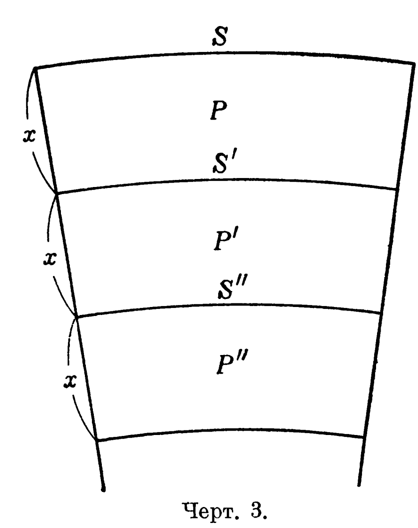
Мы назовем ось обращения, а следовательно и все линии параллельные с осью обращения, *осью* предельной сферы, а *поперечной плоскостию* [233] будем называть плоскость, в которой лежит одна или несколько осей обращения. Пересечение предельной сферы с поперечной плоскостью дает предельный круг. Часть поверхности на предельной сфере, ограниченная тремя дугами предельного круга, называется *предельным сферическим треугольником;* дуги предельного круга будут называться боками предельного сферического треугольника, а плоскостные углы между плоскостей, где лежат дуги предельного круга, будут называться углами предельного сферического треугольника.

Две прямые параллельные третьей параллельны между собою (Geometr. Unters. § 25). Отсюда следует, что все оси предельного круга и предельной сферы параллельны между собою.

Если три плоскости пересекаются по две в трех параллельных прямых, и если каждая плоскость ограничена между двух параллельных, то сумма трех плоскостных углов, которые эти плоскости составляют по порядку одна с другой, равна двум прямым углам (Geometr. Unters. § 28).

Из этого предложения следует, что сумма трех углов в предельном сферическом треугольнике равна двум прямым углам, и что всё то, что в обыкновенной геометрии доказывают о содержании боков прямолинейного треугольника, может быть повторено и доказано в пангеометрии для боков предельного сферического треугольника, стоит только заменить параллельные прямые с одним из боков треугольника дугами предельного круга, проведенными чрез точки на одном из боков предельного сферического треугольника под одним углом с этим боком. Так например, если p, q, r бока предельного сферического прямоугольного треугольника и P, Q, $\frac{\pi}{2}$ — углы против этих боков, то надобно принимать так же как для прямоугольного прямолинейного треугольника в обыкновенной геометрии следующие уравнения:

$$p = r \sin P = r \cos Q,$$
$$q = r \cos P = r \sin Q,$$
$$P + Q = \frac{\pi}{2} \; [234].$$



Черт. 3.

3. В обыкновенной геометрии доказывают, что расстояние двух параллельных прямых везде одинаково; в пангеометрии, напротив, расстояние p точек одной прямой до параллельной с нею уменьшается на стороне параллельности, т. е. на стороне, в которую обращен угол параллельности $\Pi(p)$ [235].

Теперь пусть S, S', S'' и т. д. — ряд дуг предельных кругов между двух параллельных прямых, которые служат осями этим предельным кругам (черт. 3); предположим, что части параллельных между дуг последовательных равны между собою и измеряются взаимным расстоянием двух последовательных дуг x; называем E содержание S к S', когда x равно единице длины

$$\frac{S}{S'} = E,$$

где E число положительное и более единицы. Пусть теперь число E выражается содержанием двух целых чисел n к m, так что $E = \frac{n}{m}$;

разделяем дугу S на m равных частей; чрез точки деления ведем параллельные с осями предельных кругов. Эти параллельные разделят дуги S', S'',... каждую на m равных частей. Переносим площадь между дуг S', S'' на площадь между дуг S, S' и полагая дугу S' на S, а следовательно дугу S'' на S', повторяем дугу $\frac{S'}{m}$; она должна укладываться n раз в дуге S.

Параллельность линий заставляет дугу $\frac{S''}{m}$ укладываться также n раз по дуге S'; следовательно,

$$\frac{S}{S'}=\frac{S'}{S''}.$$

Чтобы доказать то же самое в случае несоизмеримости числа E, можно прибегнуть к тем же способам, которые обыкновенно употребляются в геометрии в подобных случаях; я для краткости выпускаю эти подробности. Итак,

$$\frac{S}{S'}=\frac{S'}{S''}=\frac{S''}{S'''}=\ldots=E.$$

Это требует, чтобы для всякой линии x

$$S'=SE^{-x} \text{ [236]},$$

где E представляет число, равное содержанию S к S', когда $x=1$.

Надобно заметить, что содержание E не зависит от длины дуги S и остается то же, если две данные прямые параллельные сближаются и удаляются друг от друга, оставаясь параллельными. Число E, которое необходимо более единицы, зависит только от той прямой линии, которая выбрана за единицу в измерении прямых линий и которая измеряет расстояние между двух последовательных дуг, и может быть взята произвольно.

Свойство, которое мы доказали в отношении к дугам S, S', S'',..., остается и для площадей P, P', P'',..., ограниченных последовательными дугами и параллельными прямыми. Итак,

$$P'=PE^{-x}.$$

Если мы соединяем n подобных площадей сряду, то сумма будет

$$P\frac{1-E^{-nx}}{1-E^{-x}} \text{ [237]}.$$

Для $n=\infty$ это выражение дает площадь между двух параллельных, ограниченную с одной стороны дугой S и неограниченную

со стороны параллелизма; значение этой площади будет следовательно:

$$\frac{P}{1-E^{-x}}.$$

Если избираем за единицу площадей ту площадь, которая отвечает дуге $S=1$ и расстоянию $x=1$, то найденное выражение для площади делается для всякой дуги S

$$=\frac{ES}{E-1}$$ [238].

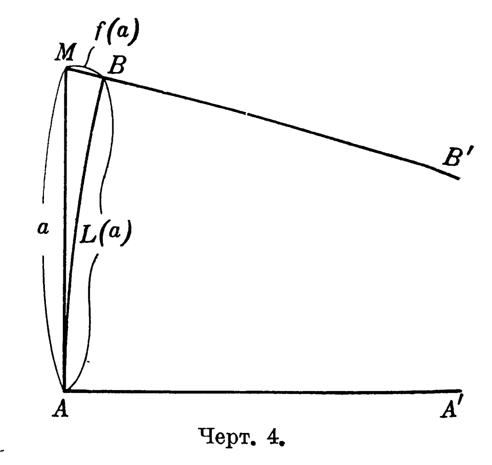
В обыкновенной геометрии число E постоянно и равно единице; после чего в обыкновенной геометрии две прямые параллельные отстоят повсюду равно друг от друга, а площадь между двумя параллельными, ограниченная только с одной стороны общим перпендикулом к ним, бесконечно велика.

III. УРАВНЕНИЯ, СВЯЗЫВАЮЩИЕ СТОРОНЫ И УГЛЫ ПРЯМОУГОЛЬНОГО ТРЕУГОЛЬНИКА; ФОРМУЛЫ СФЕРИЧЕСКОЙ ТРИГОНОМЕТРИИ

4. Рассматриваем теперь прямолинейный прямоугольный треугольник, которого a, b, c бока, а A, B, $\frac{\pi}{2}$ углы, противоположные этим бокам. Острые углы A, B могут быть принимаемы за углы параллельности $\Pi(\alpha)$, $\Pi(\beta)$, соответственные двум прямым α, β положительным [239]; условимся еще означать ударением над буквой [240] ту прямую, для которой угол параллельности служит дополнением до прямого угла углу параллельности, который отвечает прямой, означенной тою же буквой без ударения. Таким образом,

$$\Pi(\alpha)+\Pi(\alpha')=\frac{\pi}{2}, \qquad \Pi(\beta)+\Pi(\beta')=\frac{\pi}{2}.$$

Представляем себе перпендикул a (черт. 4) к оси предельного круга в вершине этой оси. Чрез вершину перпендикула a [241] ведем прямую, параллельную с осью на стороне параллельности. Означаем $f(a)$ часть этой параллельной между вершиною перпендикула и дугою, означаем $L(a)$ длину дуги предельного круга, отрезанную параллельной линией к вершине предельного круга. В обыкновенной геометрии $L(a)=a$; $f(a)=0$ для всякой линии a [242].



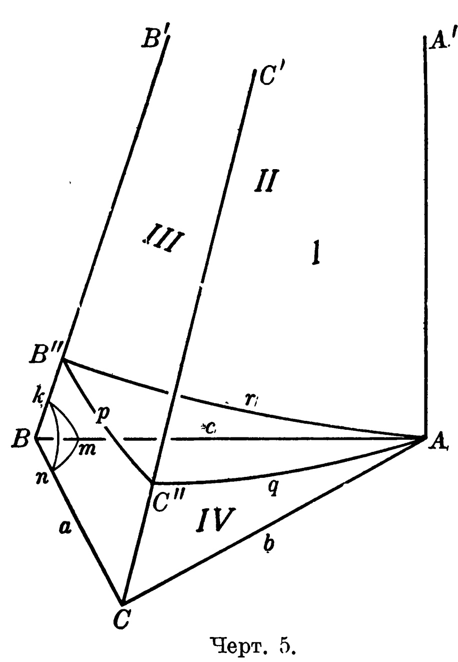
Черт. 4.

Восставляем перпендикул AA' к плоскости прямолинейного и прямоугольного треугольника, которого бока назвали a, b, c, и пусть перпендикул AA' проходит чрез вершину угла A. Проводим чрез этот перпендикул две плоскости: одну, которую

назовем первой, чрез бок b, а другую, которую назовем второй плоскостию, чрез бок c (черт. 5) [243].

Ведем во второй плоскости чрез вершину B угла $\Pi(\beta)$ прямую BB', параллельную с AA'. Третью плоскость ведем чрез BB' и чрез сторону a треугольника.

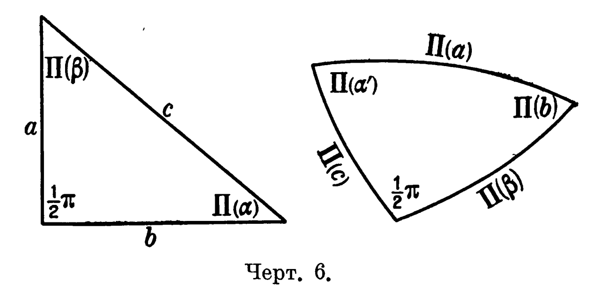
Эта третья плоскость пересечет плоскость первую в прямой CC', параллельной с AA'. Воображаем теперь сферу, описанную около точки B как центра произвольным полупоперечником менее чем a. Эта сфера пересечет, следовательно, стороны a, c треугольника и прямую BB' в трех точках, которые означим: 1-ю n, 2-ю m, 3-ю k. Дуги большого круга, которые происходят от пересечения сферы с тремя плоскостями, проходящими чрез B и которые соединяют точки n, m, k по две, составят сферический треугольник прямоугольный в m, и которого бока будут $mn = \Pi(\beta)$; $km = \Pi(c)$; $kn = \Pi(a)$. Угол knm сферического треугольника $= \Pi(b)$, а угол $kmn = \frac{\pi}{2}$ [244].



Черт. 5.

Три прямые AA', BB', CC', будучи параллельными между собою, производят сумму трех плоскостных углов $= \pi$. Отсюда следует, что третий угол mkn сферического треугольника $= \Pi(\alpha')$ [245].

Итак, всякому прямолинейному прямоугольному треугольнику, которого бока a, b, c с противоположными углами $\Pi(\alpha)$, $\Pi(\beta)$, $\frac{\pi}{2}$, отвечает треугольник сферический прямоугольный, которого бока $\Pi(\beta)$, $\Pi(c)$, $\Pi(a)$ с противоположными углами $\Pi(\alpha')$, $\Pi(b)$, $\frac{\pi}{2}$ (черт. 6).



Черт. 6.

Построим еще прямолинейный прямоугольный треугольник, которого перпендикулярные бока будут α', a, гипотенуза пусть будет g, пусть $\Pi(\lambda)$ угол против бока a и $\Pi(\mu)$ угол против бока α'.

Переходим от этого треугольника к сферическому, подобным образом как перешли от прямолинейного треугольника ABC к сферическому треугольнику kmn. Бока нового сферического треугольника (черт. 7) будут

$$\Pi(\mu),\ \Pi(g),\ \Pi(a)$$

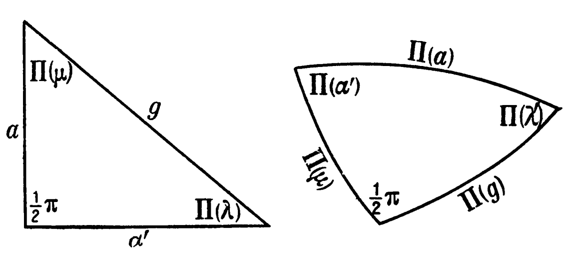
с противоположными углами

$$\Pi(\lambda'),\ \Pi(\alpha'),\ \frac{\pi}{2}\ [246].$$

В нем будут части соответственно равны частям сферического треугольника kmn, потому что бока этого последнего были $\Pi(c)$, $\Pi(\beta)$, $\Pi(a)$ с противоположными углами

$$\Pi(b),\ \Pi(\alpha'),\ \frac{\pi}{2}.$$

Это доказывает, что эти два сферические прямоугольные треугольники имеют гипотенузы равные и один из прилежащих углов равный, а потому одинаковы между собою. Отсюда следует



Черт. 7.

$$\mu = c,\quad g = \beta,\quad b = \lambda'.$$

Итак существование прямолинейного прямоугольного треугольника с боками

$$a,\ b,\ c$$

и с противоположными углами

$$\Pi(\alpha),\ \Pi(\beta),\ \frac{\pi}{2}$$

предполагает существование прямолинейного прямоугольного треугольника, которого бока a, α', β с противоположными углами

$$\Pi(b'),\ \Pi(c),\ \frac{\pi}{2}.$$

То же самое можно выразить, сказав, что если

$$a,\ b,\ c,\ \alpha,\ \beta$$

части прямолинейного прямоугольного треугольника, то

$$a,\ \alpha',\ \beta,\ b',\ c$$

будут соответственные части другого прямолинейного прямоугольного треугольника.

5. Если воображаем предельную сферу чрез точку A данного прямолинейного прямоугольного треугольника, которой сфере перпендикул AA' к плоскости этого треугольника служит осью, а точка A вершиною (черт. 5), то мы получим предельный сферический треугольник от пересечения предельной сферы с тремя плоскостями, проведенными чрез прямые AA', BB', CC'.

Означим бока этого предельного сферического треугольника p, q, r таким образом, что p будет пересечение предельной сферы [с] плоскостью, которая проходит чрез a; q пересечением предельной сферы с плоскостью, которая проходит чрез b, и r пересечением сферы с плоскостью, которая проходит чрез c; углы против этих боков будут: $\Pi(\alpha)$ против p, $\Pi(\alpha')$ против q, $\frac{\pi}{2}$ против r [247]. Согласно с вышепринятым означением, здесь $q = L(b)$; $r = L(c)$. Предельная сфера пересечет прямую CC' в точке, которой расстояние от C будет, согласно с тем же означением, $f(b)$; подобным образом будет $f(c)$ расстояние точки пересечения предельной сферы с прямою BB' от точки B [248]. Легко видеть, что

$$f(b) + f(a) = f(c) \text{ [249]}.$$

В треугольнике, которого бока предельные дуги p, q, r, будет

$$p = r \sin \Pi(\alpha); \quad q = r \cos \Pi(\alpha).$$

Умножая первое из этих двух уравнений на $E^{f(b)}$, получим:

$$pE^{f(b)} = r \sin \Pi(\alpha) E^{f(b)};$$

но

$$pE^{f(b)} = L(a) \text{ [250]},$$

а следовательно

$$L(a) = r \sin \Pi(\alpha) E^{f(b)}.$$

Таким же образом будет

$$L(b) = r \sin \Pi(\beta) E^{f(a)}.$$

Вместе с тем $q = r \cos \Pi(\alpha)$ или, что все равно:

$$L(b) = r \cos \Pi(\alpha).$$

Сравнение двух этих значений $L(b)$ дает уравнение

$$\cos \Pi(\alpha) = \sin \Pi(\beta) E^{f(a)}; \qquad (1)$$

переменяя здесь α на b', β на c и оставляя a без перемены, как это дозволяется после того, что было доказано выше, получим

$$\cos \Pi(b') = \sin \Pi(c) E^{f(a)}$$ [251]

или, так как

$$\Pi(b) + \Pi(b') = \frac{\pi}{2},$$

$$\sin \Pi(b) = \sin \Pi(c) E^{f(a)}.$$

Таким же образом должно быть

$$\sin \Pi(a) = \sin \Pi(c) E^{f(b)}.$$

Умножаем последнее уравнение на $E^{f(a)}$ и ставим сюда $f(c)$ на место $f(a) + f(b)$; так находим

$$\sin \Pi(a) E^{f(a)} = \sin \Pi(c) E^{f(c)}.$$

Но как в прямолинейном прямоугольном треугольнике перпендикулярные бока могут изменяться, тогда как гипотенуза остается та же, то можем в этом уравнении полагать $a = 0$ не переменяя c [252]; это дает, если к тому заметим, что $f(0) = 0$ и $\Pi(0) = \frac{\pi}{2}$,

$$1 = \sin \Pi(c) E^{f(c)}$$

или

$$E^{f(c)} = \frac{1}{\sin \Pi(c)} \text{ для всякой линии } c.$$

Теперь возьмем уравнение (1)

$$\cos \Pi(\alpha) = \sin \Pi(\beta) E^{f(a)}$$

и поставим сюда $\frac{1}{\sin \Pi(a)}$ на место $E^{f(a)}$; оно примет такой вид:

$$\cos \Pi(\alpha) \sin \Pi(a) = \sin \Pi(\beta). \qquad (2)$$

Переме́няя здесь α, β на b', c, оставляя a без перемены, получим

$$\sin \Pi(b) \sin \Pi(a) = \sin \Pi(c).$$

Уравнение (2) дает с переменой в нем букв

$$\cos \Pi(\beta) \sin \Pi(b) = \sin \Pi(\alpha).$$

Если в этом уравнении β, b, α переменяем на c, α', b', получим

$$\cos \Pi(c) \cos \Pi(\alpha) = \cos \Pi(b). \qquad (3)$$

Таким же образом находим

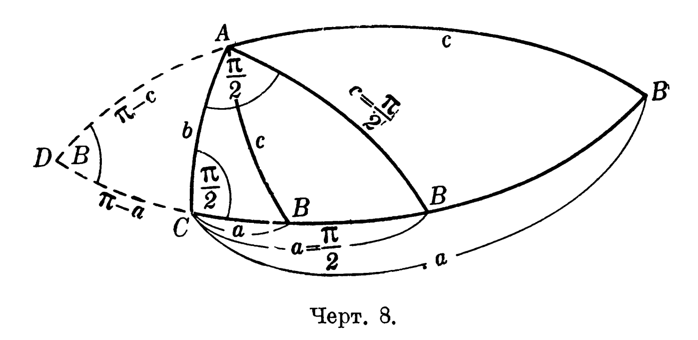
$$\cos \Pi(c) \cos \Pi(\beta) = \cos \Pi(a). \tag{4}$$

Уравнения (2), (3), (4) относятся к сферическому прямоугольному треугольнику, которого бока вперед будем означать a, b, c и где A, B означим углы против боков a, b, а $\frac{\pi}{2}$ против c. В сказанных уравнениях можем ставить a на место $\Pi(\beta)$, b на место $\Pi(c)$, c на место $\Pi(a)$, $\frac{\pi}{2} - A$ на место $\Pi(a)$; B на место $\Pi(b)$.

Таким образом уравнения делаются

$$\left.\begin{aligned} \sin A \sin c &= \sin a, \\ \cos b \sin A &= \cos B, \\ \cos a \cos b &= \cos c \end{aligned}\right\} [253]. \tag{5}$$

Уравнения (5) относятся к сферическому треугольнику, каковой может быть произведен из прямолинейного прямоугольного треугольника и которого, следовательно, бока не могут превосходить $\frac{\pi}{2}$. Прибавим сюда, что если ведем чрез вершину угла A дугу большого круга перпендикулярно к боку b, то эта дуга встретит или бок a или его продолжение таким образом, что каждая из двух дуг от точки пересечения до стороны b будет $= \frac{\pi}{2}$, а угол между этими дугами будет b.



Черт. 8.

После сего не трудно заключить, что во всяком прямоугольном сферическом треугольнике (ABC, черт. 8) если

$c < \frac{\pi}{2}$, то должно быть $a < \frac{\pi}{2}$ и $A < \frac{\pi}{2}$,

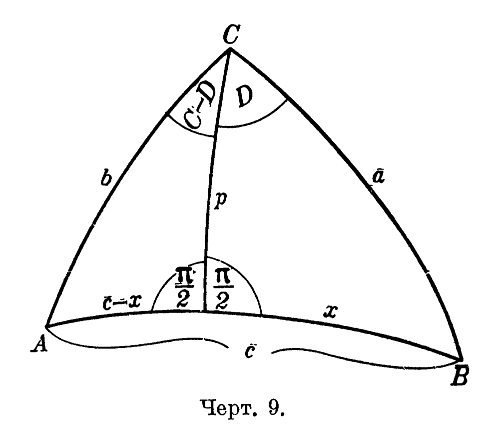
если $c = \frac{\pi}{2}$, то должно быть $a = \frac{\pi}{2}$ и $A = \frac{\pi}{2}$,

наконец если $c > \frac{\pi}{2}$, то должно быть $a > \frac{\pi}{2}$ и $A > \frac{\pi}{2}$;

отсюда следует, что предположив $a > \frac{\pi}{2}$, надобно предположить вместе с тем $c > \frac{\pi}{2}$, $A > \frac{\pi}{2}$. Если продолжаем в этом случае бока a, c по другую сторону бока b до их взаимного пересечения, то получим другой сферический прямоугольный треугольник $[ACD]$, которого бока $\pi - a$, b, $\pi - c$, а противоположные углы $\pi - A$, B, $\frac{\pi}{2}$, треугольник, к которому применяются уравнения (5). Но уравнения (5) не переменяют своего вида, если здесь вставим $\pi - a$ на место a, $\pi - c$ на место c и $\pi - A$ на место A. Это доказывает, что уравнения (5) относятся ко всем вообще сферическим прямоугольным треугольникам [254].

Переходим ко всякому сферическому треугольнику, где бока a, b, c с противоположными углами A, B, C, не предполагая между углами A, B, C прямого, потому что уравнения (5) доказаны для такого случая.

Опускаем из вершины угла C дугу большого круга p перпендикулярно к боку c; могут встретиться два случая: 1) Или перпендикул p пройдет внутри треугольника, разделяя угол C на две части D, $C - D$, а также бок c на две части x против D, и $c - x$ против $C - D$. 2) Или перпендикул p пройдет вне треугольника, присоединяя к углу C угол D и к боку c дугу x.



Черт. 9.

В первом случае (черт. 9) данный сферический треугольник будет сумма двух сферических прямоугольных треугольников. В одном из этих двух треугольников бока будут p, x, a с противоположными углами B, D, $\frac{\pi}{2}$, в другом бока p, $c - x$, b с противоположными углами A, $C - D$, $\frac{\pi}{2}$. Применяя сюда к первому треугольнику уравнения (5), получим

$$\left.\begin{aligned} \sin p &= \sin a \sin B, \\ \sin x &= \sin a \sin D, \\ \cos p \sin D &= \cos B, \\ \cos x \sin B &= \cos D, \\ \cos a &= \cos p \cos x. \end{aligned}\right\} \qquad (A)$$

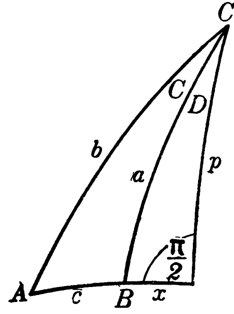
Другой треугольник дает подобным образом:

$$\left.\begin{aligned} \sin p &= \sin b \sin A, \\ \sin(c - x) &= \sin b \sin(C - D), \\ \cos p \sin(C - D) &= \cos A, \\ \cos p \cos(c - x) &= \cos b. \end{aligned}\right\} \qquad \text{(B)}$$

Сравнение двух значений $\sin p$ из (A) и (B) дает

$$\sin a \sin B = \sin b \sin A. \qquad (6)$$

Последнее из уравнений (B) будучи разделено на последнее из уравнений (A) дает



Черт. 10.

$$\operatorname{tang} x = \frac{\cos b}{\cos a \sin c} - \operatorname{cotg} c \text{ [255]}.$$

Между тем соединение второго с третьим и последним из уравнений (A) дает

$$\operatorname{tang} x = \operatorname{tang} a \cos B.$$

Сравнение двух значений для $\operatorname{tang} x$ приводит нас к уравнению

$$\cos b - \cos a \cos c = \sin a \sin c \cos B. \qquad (7)$$

Если перпендикул падает вне данного сферического треугольника, присоединяя таким образом дугу x к боку c и угол D к углу C (черт. 10), то произойдут как и прежде два сферические прямоугольные треугольника. Бока одного из этих двух треугольников будут p, x, a с противоположными углами $\pi - B$, D, $\frac{\pi}{2}$; бока другого треугольника будут p, $c + x$, b с противоположными углами A, $C + D$, $\frac{\pi}{2}$. Применение уравнений (5) к первому из этих треугольников дает:

$$\left.\begin{aligned} \sin p &= \sin a \sin B, \\ \sin x &= \sin a \sin D, \\ -\cos B &= \cos p \sin D, \\ \cos D &= \cos x \sin B, \\ \cos a &= \cos p \cos x. \end{aligned}\right\} \qquad \text{(C)}$$

Второй треугольник, которого бока p, $c+x$, b с противоположными углами A, $C+D$, $\frac{\pi}{2}$, дает таким же образом

$$\left.\begin{aligned} \sin p &= \sin b \sin A, \\ \sin(c+x) &= \sin b \sin(C+D), \\ \cos A &= \cos p \sin(C+D), \\ \cos(C+D) &= \cos(c+x)\sin A, \\ \cos b &= \cos p \cos(c+x). \end{aligned}\right\} \qquad \text{(D)}$$

Сравнение двух значений для $\sin p$ из уравнений (C) и (D) снова дает уравнение (6).

Из уравнений (C) и (D) находим

$$\operatorname{tang} x = \operatorname{cotg} c - \frac{\cos b}{\cos a \sin c}$$ [256].

Из уравнений (C) находим еще

$$\operatorname{tang} x = -\operatorname{tang} a \cos B.$$

Сравнение двух значений для $\operatorname{tang} x$ приводит нас снова к уравнению (7), которое таким образом, как и уравнение (6), доказано для всех сферических треугольников вообще.

Уравнение (7) с переменою в нем букв дает еще два следующие:

$$\cos a - \cos b \cos c = \sin b \sin c \cos A,$$
$$\cos c - \cos a \cos b = \sin a \sin b \cos C.$$

Умножая последнее уравнение на $\cos b$, присоединяя произведение к первому и разделяя сумму на $\sin b$, получим

$$\cos a \sin b = \sin c \cos A + \sin a \cos b \cos C.$$

Вставляя сюда значение $\sin c$

$$\sin c = \frac{\sin C}{\sin A} \sin a,$$

согласно с уравнением (6), потом разделяя на $\sin a$, получим

$$\operatorname{cotang} a \sin b = \operatorname{cotang} A \sin C + \cos b \cos C. \qquad (8)$$

Заменяя здесь $\sin b$ его значением

$$\sin a \frac{\sin B}{\sin A},$$

потом умножая уравнение на $\sin A$, получим

$$\cos a \sin B = \cos b \cos C \sin A + \sin C \cos A,$$

откуда получим с переменою букв

$$\cos b \sin A = \cos a \cos C \sin B + \sin C \cos B.$$

Исключение $\cos b$ из двух последних уравнений приводит нас к уравнению:

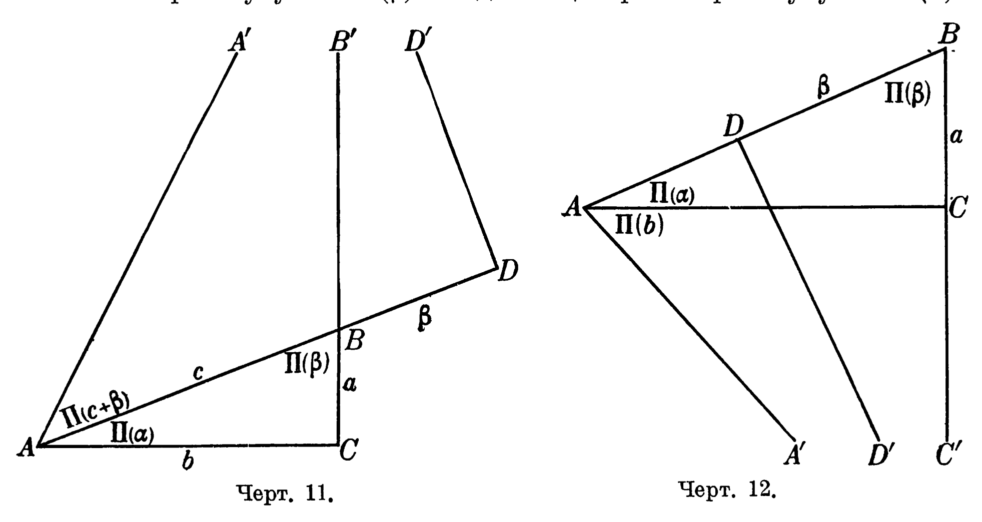
$$\cos a \sin B \sin C = \cos B \cos C + \cos A \tag{9}$$

Уравнения (6), (7), (8), (9) те же, какие обыкновенно дают в сферической тригонометрии и которые доказывают помощию обыкновенной геометрии. Итак сферическая тригонометрия остается в том же виде, будет ли допущено предположение, что сумма трех углов в прямолинейном треугольнике всегда равна π или предположению, что она $< \pi$; это весьма замечательно в отношении к сферической тригонометрии, но не подтверждается для тригонометрии прямолинейной.

IV. РАЗЫСКАНИЕ ФУНКЦИИ $\Pi(x)$

6. Прежде нежели приступим к выводу уравнений, которые выражают в пангеометрии зависимость боков и углов всякого прямолинейного треугольника, мы займемся исследованием, какова должна быть функция $\Pi(x)$ для всякой линии x. С этой целью рассматриваем прямолинейный треугольник, которого бока a, b, c с противоположными углами $\Pi(\alpha)$, $\Pi(\beta)$, $\frac{\pi}{2}$; продолжаем бок c за вершину угла $\Pi(\beta)$ и делаем продолжение равное β.

В конце линии β (черт. 11) ставим перпендикул $[DD']$, который и будет параллельный с боком a и с продолжением $[BB']$ этого бока за вершину угла $\Pi(\beta)$. Ведем еще чрез вершину угла $\Pi(\alpha)$



Черт. 11. Черт. 12.

параллельную $[AA']$ к тому же продолжению бока a. Угол, который эта прямая делает с боком c, будет $\Pi(c+\beta)$, угол, который она делает с b, будет $\Pi(b)$ [257]. Таким образом составится уравнение

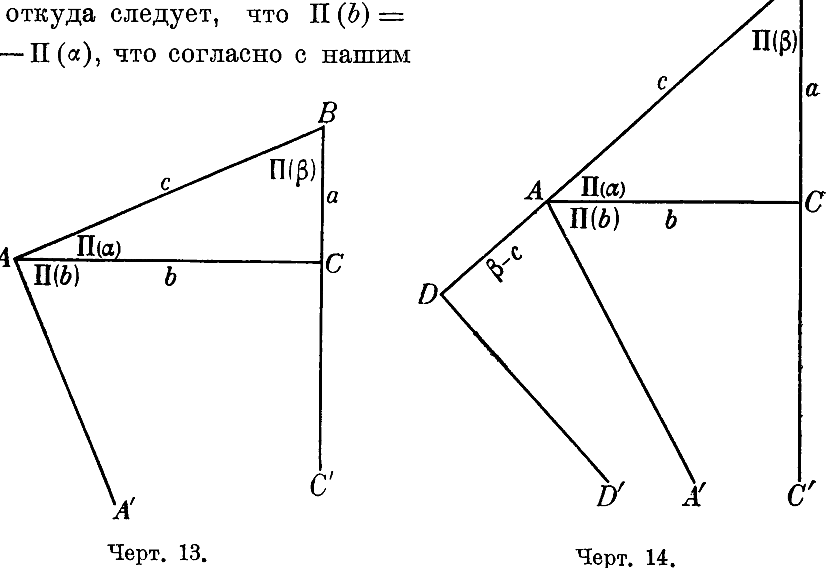
$$\Pi(b) = \Pi(c+\beta) + \Pi(\alpha). \qquad (\Pi)$$

Если линию β кладем от вершины угла $\Pi(\beta)$ на самый бок c (черт. 12) и к линии β ведем в конце $[D]$ перпендикул $[DD']$

[к] стороне угла $\Pi(\beta)$, то эта прямая будет параллельною к продолжению a [т. е. к CC'] за вершину прямого угла. Ведем чрез вершину угла $\Pi(\alpha)$ параллельную $[AA']$ к последнему перпендикулу, которая будет следовательно также параллельна ко второму [258] продолжению $[CC']$ бока a, делая угол $\Pi(c-\beta)$ с боком c, а $\Pi(b)$ с боком b; итак

$$\Pi(b)=\Pi(c-\beta)-\Pi(\alpha). \qquad (\Pi')$$

Легко увериться, что это уравнение справедливо не только для c более β [259], но также для $c=\beta$ и $c<\beta$. Действительно, если $c=\beta$ (черт. 13), то $\Pi(c-\beta)=\Pi(0)=\frac{\pi}{2}$; с другой стороны, перпендикул $[AA']$ к c чрез вершину угла $\Pi(\alpha)$ делается параллельным к a, откуда следует, что $\Pi(b)=$ $=\frac{\pi}{2}-\Pi(\alpha)$, что согласно с нашим



Черт. 13.

Черт. 14.

уравнением. Если $c<\beta$ (черт. 14), то конец $[D]$ линии β упадет за вершину угла $\Pi(\alpha)$ на расстоянии $\beta-c$ от вершины; перпендикул $[DD']$ к β в конце $[D]$ этой линии будет параллелен с a $[BC']$ и с прямой $[AA']$, проведенною чрез вершину угла $\Pi(\alpha)$ параллельно к a; откуда следует, что два смежные угла, которые эта параллельная делает с боком c, острый равен $\Pi(\beta-c)$, а тупой равен $\Pi(\alpha)+\Pi(b)$. Сумма двух смежных углов составляет π, следовательно

$$\Pi(\beta-c)+\Pi(\alpha)+\Pi(b)=\pi$$

или

$$\Pi(b) = \pi - \Pi(\beta - c) - \Pi(\alpha).$$

Но согласно с определением функции $\Pi(x)$ [260]

$$\pi - \Pi(\beta - c) = \Pi(c - \beta),$$

после чего

$$\Pi(b) = \Pi(c - \beta) - \Pi(\alpha),$$

— то же уравнение, какое было найдено выше и которое таким образом доказано для всех случаев.

Два уравнения (П) и (П′) могут быть заменены еще такими:

$$\Pi(b) = \frac{1}{2}\Pi(c+\beta) + \frac{1}{2}\Pi(c-\beta),$$

$$\Pi(\alpha) = \frac{1}{2}\Pi(c+\beta) - \frac{1}{2}\Pi(c-\beta);$$

но уравнение (3) дает

$$\cos\Pi(c) = \frac{\cos\Pi(b)}{\cos\Pi(\alpha)}.$$

Вставляя в это уравнение на место $\Pi(b)$ и $\Pi(\alpha)$ их значения, находим:

$$\cos\Pi(c) = \frac{\cos\left\{\frac{1}{2}\Pi(c+\beta) + \frac{1}{2}\Pi(c-\beta)\right\}}{\cos\left\{\frac{1}{2}\Pi(c-\beta) - \frac{1}{2}\Pi(c+\beta)\right\}}.$$

Из этого уравнения мы выводим следующее:

$$\operatorname{tang}^2\frac{1}{2}\Pi(c) = \operatorname{tang}\frac{1}{2}\Pi(c-\beta)\operatorname{tang}\frac{1}{2}\Pi(c+\beta).$$

Так как линии c, β могут изменяться независимо одна от другой во всяком прямолинейном прямоугольном треугольнике, то полагая постепенно в последнем уравнении $c = \beta$, $c = 2\beta$, $c = 3\beta$, ..., $c = n\beta$, мы выводим из этих уравнений для всякого целого положительного числа n

$$\operatorname{tang}^n\frac{1}{2}\Pi(c) = \operatorname{tang}\frac{1}{2}\Pi(nc).$$

Легко доказать справедливость этого уравнения для чисел n отрицательных или дробных. Отсюда следует, что взяв за единицу прямых линий такую, которая дает:

$$\operatorname{tang}\frac{1}{2}\Pi(1) = e^{-1},$$

где e основание неперовых логарифмов, получим для всякой линии x

$$\operatorname{tang}\frac{1}{2}\Pi(x) = e^{-x}.$$

Это выражение дает $\Pi(x) = \frac{1}{2}\pi$ для $x = 0$, и $\Pi(x) = 0$ для $x = \infty$, $\Pi(x) = \pi$ для $x = -\infty$, согласно с тем, что было принято и доказано выше.

7. Значение, найденное для $\operatorname{tang} \frac{1}{2}\Pi(x)$, дает для всякой линии x

$$\sin \Pi(x) = \frac{2}{e^x + e^{-x}}, \quad \cos \Pi(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

и для двух произвольных линий x, y

$$\left.\begin{aligned} \sin \Pi(x+y) &= \frac{\sin \Pi(x) \sin \Pi(y)}{1 + \cos \Pi(x) \cos \Pi(y)}, \\ \sin \Pi(x-y) &= \frac{\sin \Pi(x) \sin \Pi(y)}{1 - \cos \Pi(x) \cos \Pi(y)}, \\ \cos \Pi(x+y) &= \frac{\cos \Pi(x) + \cos \Pi(y)}{1 + \cos \Pi(x) \cos \Pi(y)}, \\ \cos \Pi(x-y) &= \frac{\cos \Pi(x) - \cos \Pi(y)}{1 - \cos \Pi(x) \cos \Pi(y)}, \\ \operatorname{tang} \Pi(x+y) &= \frac{\sin \Pi(x) \sin \Pi(y)}{\cos \Pi(x) + \cos \Pi(y)}. \end{aligned}\right\} [261]$$

V. УРАВНЕНИЯ, СВЯЗЫВАЮЩИЕ СТОРОНЫ И УГЛЫ ВСЯКОГО ТРЕУГОЛЬНИКА

8. Уравнения (2), (3), (4), найденные для сферических прямоугольных треугольников, относятся также к прямолинейному прямоугольному треугольнику, которого бока a, b, c с противоположными углами $\Pi(\alpha)$, $\Pi(\beta)$, $\frac{\pi}{2}$. Итак, поставляя A на место $\Pi(\alpha)$, B на место $\Pi(\beta)$, получим для всякого прямолинейного прямоугольного треугольника, которого бока a, b, c, и где A угол против a, B угол против b и $\frac{\pi}{2}$ угол против c, следующие уравнения:

$$\left.\begin{aligned} \sin\Pi(a)\cos A &= \sin B, \\ \cos\Pi(c)\cos A &= \cos\Pi(b), \\ \cos\Pi(c)\cos B &= \cos\Pi(a). \end{aligned}\right\} [262] \qquad (10)$$

К этим уравнениям присоединим еще следующее, которое также было доказано выше:

$$\sin\Pi(a)\sin\Pi(b) = \sin\Pi(c). \qquad (11)$$

Первое из уравнений (10) с переменою в нем букв может быть еще написано так:

$$\sin\Pi(b)\cos B = \sin A.$$

Вставляя сюда значение $\cos B$ из третьего уравнения (10), получим:

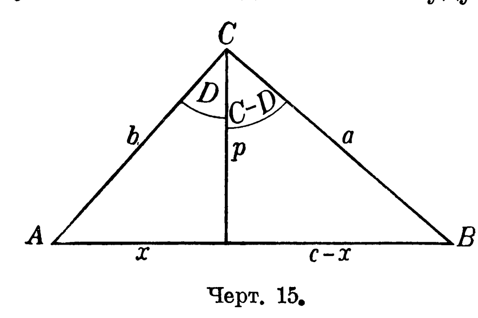
$$\sin\Pi(b)\cos\Pi(a) = \sin A\cos\Pi(c).$$

Исключая из этого уравнения $\sin\Pi(b)$ помощью уравнения (11) получим:

$$\operatorname{tang}\Pi(c) = \sin A\operatorname{tang}\Pi(a). \qquad (12)$$

9. Пусть теперь a, b, c будут бока вообще какого-нибудь прямолинейного треугольника, потом A, B, C углы против этих боков. Опускаем перпендикул p из вершины угла C на бок с. Если p

упадет внутри треугольника (черт. 15) и разделит угол C на два угла D и $C-D$ и бок c на две части: x против D, $c-x$ против $C-D$, то произойдут два прямолинейные прямоугольные треугольника. В одном бока будут p, x, b с противоположными углами A, D, $\frac{\pi}{2}$; в другом бока будут p, $c-x$, a с противоположными углами B, $C-D$, $\frac{\pi}{2}$. Применение уравнения (12) к первому из этих двух треугольников дает:



Черт. 15.

$$\operatorname{tang} \Pi(b) = \sin A \operatorname{tang} \Pi(p).$$

Второй из этих двух треугольников дает таким же образом:

$$\operatorname{tang} \Pi(a) = \sin B \operatorname{tang} \Pi(p);$$

откуда заключим:

$$\sin A \operatorname{tang} \Pi(a) = \sin B \operatorname{tang} \Pi(b). \qquad (13)$$

Применение уравнений (10) и (11) к первому из двух треугольников дает:

$$\cos \Pi(b) \cos A = \cos \Pi(x),$$

$$\sin \Pi(x) \sin \Pi(p) = \sin \Pi(b).$$

Второй треугольник дает:

$$\sin \Pi(p) \sin \Pi(c-x) = \sin \Pi(a).$$

Вставляя в это последнее уравнение на место $\sin \Pi(c-x)$ его значение, взятое из общей формулы, найденной выше для $\sin \Pi(x-y)$, получим:

$$\frac{\sin \Pi(a)}{\sin \Pi(p)} = \frac{\sin \Pi(c) \sin \Pi(x)}{1 - \cos \Pi(c) \cos \Pi(x)};$$

откуда мы выводим, вставляя

$$\sin \Pi(p) = \frac{\sin \Pi(b)}{\sin \Pi(x)},$$

$$\cos \Pi(x) = \cos \Pi(b) \cos A,$$

следующее уравнение:

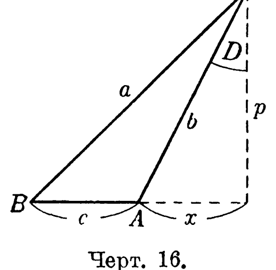
$$1 - \cos \Pi(b) \cos \Pi(c) \cos A = \frac{\sin \Pi(b) \sin \Pi(c)}{\sin \Pi(a)}. \qquad (14)$$

Уравнения (13), (14) поверяются сами собой для $A = \frac{\pi}{2}$, когда перпендикул p совпадает с боком b, потому что в этом случае

уравнение (13) делается уравнением (12), а уравнение (14) переходит в уравнение (11) [263], уравнения доказанные для всякого прямолинейного прямоугольного треугольника.

Если перпендикул p падает вне треугольника на продолжение бока c (черт. 16), прибавляя линию x к боку c и угол D к углу C, то образуются два прямоугольные треугольника. Бока одного будут p, x, b с противоположными углами $(\pi - A)$, D, $\frac{\pi}{2}$, бока другого будут p, $c+x$, a с противоположными углами B, $C+D$, $\frac{\pi}{2}$. Применение уравнения (12) к первому из этих двух треугольников дает:

$$\operatorname{tang} \Pi(b) = \sin A \operatorname{tang} \Pi(p).$$



Черт. 16.

Из другого треугольника мы выводим таким же образом:

$$\operatorname{tang} \Pi(a) = \sin B \operatorname{tang} \Pi(p).$$

Исключая $\operatorname{tang} \Pi(p)$ из двух последних уравнений, снова находим уравнение (13). Применение уравнений (10) и (11) к первому из двух треугольников дает:

$$-\cos \Pi(b) \cos A = \cos \Pi(x),$$

$$\sin \Pi(b) = \sin \Pi(x) \sin \Pi(p).$$

Из второго треугольника мы находим таким же образом:

$$\sin \Pi(a) = \sin \Pi(p) \sin \Pi(c+x).$$

Заменяя в этом уравнении $\sin \Pi(c+x)$ его значением, взятым из общей формулы, найденной выше для $\sin \Pi(x+y)$, получим:

$$\frac{\sin \Pi(a)}{\sin \Pi(p)} = \frac{\sin \Pi(c) \sin \Pi(x)}{1 + \cos \Pi(c) \cos \Pi(x)}.$$

Вставляя сюда

$$\sin \Pi(p) = \frac{\sin \Pi(b)}{\sin \Pi(x)},$$

$$\cos \Pi(x) = -\cos \Pi(b) \cos A,$$

получим:

$$\frac{\sin \Pi(a)}{\sin \Pi(b)} = \frac{\sin \Pi(c)}{1 - \cos \Pi(b) \cos \Pi(c) \cos A},$$

уравнение тождественное с уравнением (14).

Таким образом, уравнения (13), (14) доказаны для всякого прямолинейного треугольника.

Уравнение (14) с переменою букв дает:

$$1 - \cos \Pi (c) \cos \Pi (a) \cos B = \frac{\sin \Pi (c) \sin \Pi (a)}{\sin \Pi (b)}.$$

Умножая это уравнение почленно на уравнение (14), получим:

$$1 - \cos \Pi (c) \cos \Pi (a) \cos B - \cos \Pi (b) \cos \Pi (c) \cos A + \\ + \cos \Pi (a) \cos \Pi (b) \cos^2 \Pi (c) \cos A \cos B = \sin^2 \Pi (c)$$

или:

$$\cos^2 \Pi (c) - \cos \Pi (c) \cos \Pi (a) \cos B - \cos \Pi (b) \cos \Pi (c) \cos A + \\ + \cos \Pi (a) \cos \Pi (b) \cos^2 \Pi (c) \cos A \cos B = 0.$$

Откидывая от этого уравнения общий множитель $\cos \Pi (c)$, получим:

$$\cos \Pi (c) - \cos \Pi (a) \cos B - \cos \Pi (b) \cos A + \\ + \cos \Pi (a) \cos \Pi (b) \cos \Pi (c) \cos A \cos B = 0.$$

Таким же образом находим:

$$\cos \Pi (a) - \cos \Pi (b) \cos C - \cos \Pi (c) \cos B + \\ + \cos \Pi (a) \cos \Pi (b) \cos \Pi (c) \cos B \cos C = 0.$$

Умножаем это уравнение на $\cos A$ и вычитаем произведение из произведения предыдущего уравнения на $\cos C$, получим:

$$\cos \Pi (a) \{\cos A + \cos B \cos C\} = \cos \Pi (c) \{\cos C + \cos A \cos B\}.$$

Возвышая обе части этого уравнения в квадрат и разделяя потом на $\cos^2 \Pi (c)$, оно примет следующий вид:

$$\frac{\cos^2 \Pi (a)}{\cos^2 \Pi (c)} \{\cos A + \cos B \cos C\}^2 = \{\cos C + \cos A \cos B\}^2.$$

Между тем уравнение (13) дает [264]:

$$\frac{1}{\cos^2 \Pi (c)} = 1 + \frac{\sin^2 A}{\sin^2 C} \operatorname{tang}^2 \Pi (a).$$

Если мы в предпоследнее уравнение вставим вместо $\frac{1}{\cos^2 \Pi (c)}$ его значение из последнего уравнения, то получим:

$$\cos^2 \Pi (a) + \frac{\sin^2 A}{\sin^2 C} \sin^2 \Pi (a) = \left\{\frac{\cos C + \cos A \cos B}{\cos A + \cos B \cos C}\right\}^2,$$

потом:

$$\sin^2 \Pi (a) \left\{1 - \frac{\sin^2 A}{\sin^2 C}\right\} = \frac{\sin^2 B (\sin^2 C - \sin^2 A)}{(\cos A + \cos B \cos C)^2}.$$

Разделяя это уравнение на $\sin^2 C - \sin^2 A$ и извлекая корень квадратный, находим:

$$\sin \Pi (a) = \frac{\sin B \sin C}{\cos + A \cos B \cos C}$$

без обоюдности в знаках, потому что члены последнего уравнения оба положительны. Действительно $\Pi(a) < \frac{\pi}{2}$; $B < \pi$; $C < \pi$, откуда следует, что синусы этих углов положительны, потом:

$$\cos A + \cos(B+C) = 2\cos\frac{1}{2}(A+B+C)\cos\frac{1}{2}(B+C-A),$$

но $A+B+C<\pi$, следовательно $\cos\frac{1}{2}(A+B+C)$ положителен, так же, как $\cos\frac{1}{2}(B+C-A)$; прикладывая к обоим членам последнего уравнения положительное число $\sin B \sin C$, находим: $\cos A + \cos B\cos C > 0$. Итак во всяком прямолинейном треугольнике:

$$\cos A + \cos B\cos C = \frac{\sin B \sin C}{\sin \Pi(a)}. \qquad (15)$$

Умножение уравнения (14) почленно на следующее уравнение, которое отсюда происходит с переменою букв [265]

$$1 - \cos\Pi(a)\cos\Pi(b)\cos C = \frac{\sin\Pi(a)\sin\Pi(b)}{\sin\Pi(c)} \qquad (16)$$

дает

$$\{1 - \cos\Pi(a)\cos\Pi(b)\cos C\}\,\{1 - \cos\Pi(b)\cos\Pi(c)\cos A\} = \sin^2\Pi(b),$$

которому после сделанного умножения можно дать следующий вид:

$$\cos^2\Pi(b) - \cos\Pi(a)\cos\Pi(b)\cos C - \cos\Pi(b)\cos\Pi(c)\cos A +$$
$$+ \cos^2\Pi(b)\cos\Pi(a)\cos\Pi(c)\cos A\cos C = 0$$

или, разделяя на $\cos\Pi(b)$,

$$\cos\Pi(b) - \cos\Pi(a)\cos C - \cos\Pi(c)\cos A +$$
$$+ \cos\Pi(a)\cos\Pi(b)\cos\Pi(c)\cos A\cos C = 0. \qquad (17)$$

Но мы находим, согласно с уравнением (13) [266],

$$\cos\Pi(c) = \frac{\sin\Pi(c)\sin C}{\sin A}\,\text{cotang}\,\Pi(a);$$

в этом уравнении мы можем вставить вместо $\sin\Pi(c)$ его значение, взятое из уравнения (16); получим:

$$\cos\Pi(c) = \frac{\sin\Pi(b)\cos\Pi(a)\sin C}{\{1 - \cos\Pi(a)\cos\Pi(b)\cos C\}\sin A}.$$

Вставляя это значение $\cos\Pi(c)$ в уравнение (17), получим:

$$\text{cotang}\,A\sin C\sin\Pi(b) + \cos C = \frac{\cos\Pi(b)}{\cos\Pi(a)}. \qquad (18)$$

Соединяем уравнения (13), (14), (15) и (18), которые выражают зависимость углов и боков всякого прямолинейного треугольника,

таким образом, чтобы облегчить их применение:

$$\left.\begin{aligned} &\sin A \operatorname{tang} \Pi(a) = \sin B \operatorname{tang} \Pi(b), \\ &1 - \cos \Pi(b) \cos \Pi(c) \cos A = \frac{\sin \Pi(b) \sin \Pi(c)}{\sin \Pi(a)}, \\ &\cos A + \cos B \cos C = \frac{\sin B \sin C}{\sin \Pi(a)}, \\ &\operatorname{cotang} A \sin C \sin \Pi(b) + \cos C = \frac{\cos \Pi(b)}{\cos \Pi(a)}. \end{aligned}\right\} \quad (19)$$

С этими уравнениями пангеометрия переходит в Аналитику и таким образом составляет особенную полную геометрическую теорию; уравнения (19) служат для представления кривых линий уравнениями между координатами их точек, для вычисления длины и площадей кривых, поверхности и объема тел, как я показал это в ученых записках Казанского Университета за 1829 год.

10. Выше было замечено, что пангеометрия переходит в обыкновенную геометрию с предположением линий чрезвычайно малых. Теперь мы можем поверить это заявление. Для всякой линии x чрезвычайно малой можем довольствоваться приближенными значениями:

$$\begin{aligned} \operatorname{cotang} \Pi(x) &= x, \\ \sin \Pi(x) &= 1 - \frac{1}{2} x^2, \\ \cos \Pi(x) &= x. \end{aligned}$$

Если мы рассматриваем бока в треугольнике как бесконечно малые первого порядка, и если мы пренебрегаем бесконечно малыми величинами далее второго порядка, то уравнения (19) после вставления приближенных значений $\sin \Pi(a)$, $\sin \Pi(b)$ и проч. примут следующий вид:

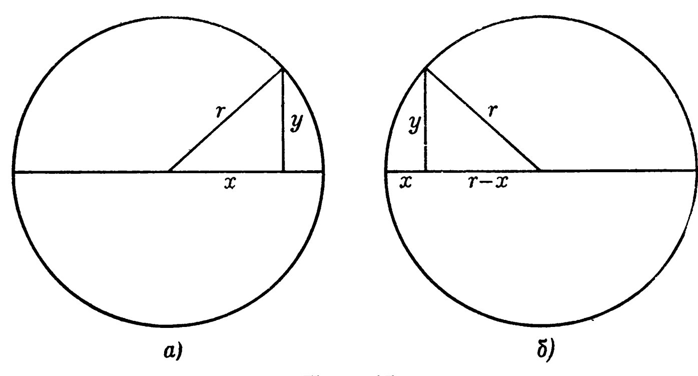
$$\begin{aligned} &b \sin A = a \sin B, \\ &a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A, \\ &\cos A + \cos(B + C) = 0, \\ &a \sin(A + C) = b \sin A. \end{aligned}$$

Первые два из этих уравнений известны в обыкновенной тригонометрии. Последние два дают

$$A + B + C = \pi.$$

VI. НАЧАЛА АНАЛИТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ. ДЛИНА ОКРУЖНОСТИ И ДУГИ ПРЕДЕЛЬНОГО КРУГА

11. Чтобы дать пример, каким образом кривые линии определяются помощью координат их точек, называем y перпендикул, опущенный от точки на круге (черт. 17) к одному из его непо-



Черт. 17.

движных поперечников, которого величину означаем $2r$, следовательно под r разумеем полупоперечник круга.

Назовем еще x часть этого поперечника от центра до перпендикула y (черт. 17, *а*). Применение уравнения (11) к прямоугольному треугольнику, которого бока x, y, r, дает

$$\sin \Pi (x) \sin \Pi (y) = \sin \Pi (r), \qquad (20)$$

что и составляет *уравнение круга* между прямых перпендикулярных координат x, y.

Если мы считаем x от конца поперечника в круге (черт. 17, *б*), то уравнение (20) примет вид:

$$\sin \Pi (r - x) \sin \Pi (y) = \sin \Pi (r) \qquad [20']$$

или, что все равно:

$$2 (e^r + e^{-r}) = (e^{r-x} + e^{-r+x}) (e^y + e^{-y}).$$

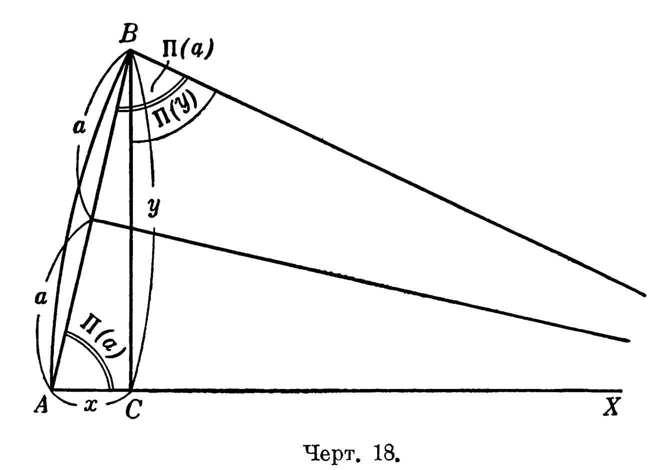
Если мы разделяем это уравнение на e^r и если потом положим $r = \infty$, то получим *уравнение для предельного круга*

$$2 = (e^y + e^{-y})\, e^{-x}$$

или

$$\sin \Pi(y) = \operatorname{tang} \frac{1}{2} \Pi(x). \qquad [20a]$$

Из определения предельного круга следует, что две оси предельного круга, проведенные чрез концы одной хорды, бывают наклонены к этой хорде под равными углами, свойство, которое может быть принято за определение предельного круга, и откуда можно тоже вывести уравнение этой кривой, рассматривая



Черт. 18.

треугольник (черт. 18), которого бока x, y и хорда $2a$ предельного круга. Углы этого треугольника будут: $\Pi(a) - \Pi(y)$ против x, $\Pi(a)$ против y и $\frac{\pi}{2}$ против $2a$. Согласно с уравнениями (10), (11), в этом треугольнике будет:

$$\sin \Pi(x) \sin \Pi(y) = \sin \Pi(2a),$$
$$\sin \Pi(x) \cos \{\Pi(a) - \Pi(y)\} = \sin \Pi(a),$$
$$\sin \Pi(y) \cos \Pi(a) = \sin \{\Pi(a) - \Pi(y)\}$$ [267].

Последнее уравнение дает:

$$2 \operatorname{tang} \Pi(y) = \operatorname{tang} \Pi(a), \qquad (21)$$

а первое уравнение может быть написано так:

$$\sin \Pi(x) \sin \Pi(y) = \frac{\sin^2 \Pi(a)}{1 + \cos^2 \Pi(a)}.$$

Вставляя в это уравнение вместо $\sin^2 \Pi(a)$, $1+\cos^2 \Pi(a)$ их значения, выраженные посредством $\operatorname{tang}^2 \Pi(a)$, и вводя сюда значение $\operatorname{tang}^2 \Pi(a)$ из уравнения (21), находим:

$$\sin \Pi(x) \sin \Pi(y) = \frac{2 \operatorname{tang}^2 \Pi(y)}{1 + 2 \operatorname{tang}^2 \Pi(y)} \ [268],$$

потом

$$\sin \Pi(x) = \frac{2 \sin \Pi(y)}{1 + \sin^2 \Pi(y)},$$

откуда выводим:

$$2 \cos^2 \frac{1}{2} \Pi(x') = \frac{\{1 + \sin \Pi(y)\}^2}{1 + \sin^2 \Pi(y)} \ [269],$$

$$2 \sin^2 \frac{1}{2} \Pi(x') = \frac{\{1 - \sin \Pi(y)\}^2}{1 + \sin^2 \Pi(y)}.$$

Разделяя последнее из этих уравнений на предпоследнее и извлекая квадратный корень, получим:

$$\operatorname{tang} \frac{1}{2} \Pi(x') = \frac{1 - \sin \Pi(y)}{1 + \sin \Pi(y)};$$

отсюда

$$\sin \Pi(y) = \frac{1 - \operatorname{tang} \frac{1}{2} \Pi(x')}{1 + \operatorname{tang} \frac{1}{2} \Pi(x')}.$$

Второй части этого уравнения можно дать еще вид:

$$\frac{\cos \frac{1}{2} \Pi(x') - \sin \frac{1}{2} \Pi(x')}{\cos \frac{1}{2} \Pi(x') + \sin \frac{1}{2} \Pi(x')} =$$

$$= \frac{\sin \left\{\frac{1}{4}\pi - \frac{1}{2} \Pi(x')\right\}}{\cos \left\{\frac{1}{4}\pi - \frac{1}{2} \Pi(x')\right\}} = \frac{\sin \frac{1}{2} \Pi(x)}{\cos \frac{1}{2} \Pi(x)} = \operatorname{tang} \frac{1}{2} \Pi(x),$$

а следовательно

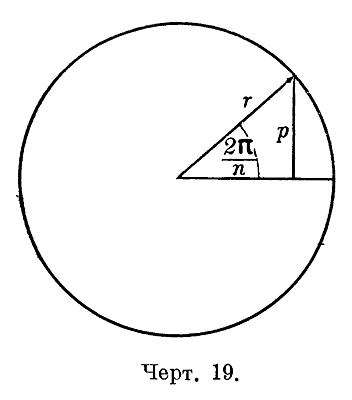
$$\sin \Pi(y) = \operatorname{tang} \frac{1}{2} \Pi(x), \qquad [20a]$$

как найдено было выше.

12. Чтобы дать пример как вычисляется длина кривой линии, ищем *длину окружности круга*, которого полупоперечник r. Ведем два полупоперечника, которых угол при центре пусть будет $\frac{2\pi}{n}$, где n означает целое число. Опускаем от конца одного из

полупоперечников перпендикул p на другой полупоперечник (черт. 19). Произведение np будет тем менее разниться с длиною окружности, чем число n более.

Прямоугольный треугольник, где p один из катетов, r гипотенуза, а $\frac{2\pi}{n}$ угол против p, дает (уравнение 13):



Черт. 19.

$$\sin\frac{2\pi}{n}\operatorname{tang}\Pi(p) = \operatorname{tang}\Pi(r).$$

Но известно, что

$$\left\{n\sin\frac{2\pi}{n}\right\} = 2\pi \quad \text{для} \quad n = \infty,$$

между тем как

$$\frac{\operatorname{tang}\Pi(p)}{n} = \frac{2}{n(e^p - e^{-p})}$$

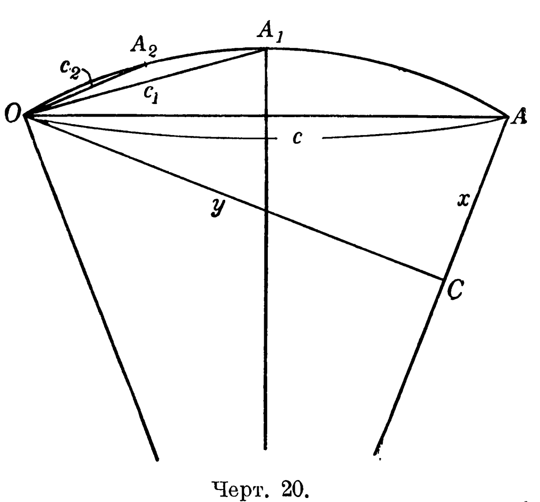
и

$$n(e^p - e^{-p}) = 2np$$

с точностию тем большею, чем число n более, а следовательно p енее. После чего длина окружности [радиуса] r

$$= np = 2\pi\operatorname{cotg}\Pi(r)$$

или длина окружности [радиуса] r [равна] $\pi(e^r - e^{-r})$; это дает для r чрезвычайно малого числа длина окружности r $= 2\pi r$, как в обыкновенной геометрии.



Черт. 20.

Определяем еще *дугу* s $[OA]$ *предельного круга* (черт. 20) посредством координат: y перпендикула $[OC]$, опущенного от одного конца $[O]$ дуги s на ось, проведенную чрез другой конец $[^{2,0}]$, а x часть $[AC]$ этой оси между вершиною и перпендикулом y. Пусть c — хорда $[OA]$ дуги s, пусть также c_1, c_2, c_3 и т. д. — хорды дуг $\frac{1}{2}s$, $\frac{1}{2^2}s$, $\frac{1}{2^3}s$, ... Мы доказали выше (уравнение 21), что:

$$\operatorname{cotg}\Pi(y) = 2\operatorname{cotg}\Pi\left(\frac{1}{2}c\right).$$

Подобным образом будет:

$$\operatorname{cotg}\Pi\left(\frac{1}{2}c\right)=2\operatorname{cotg}\Pi\left(\frac{1}{2}c_1\right),$$

$$\operatorname{cotg}\Pi\left(\frac{1}{2}c_1\right)=2\operatorname{cotg}\Pi\left(\frac{1}{2}c_2\right),$$

$$\operatorname{cotg}\Pi\left(\frac{1}{2}c_2\right)=2\operatorname{cotg}\Pi\left(\frac{1}{2}c_3\right)$$

и вообще для всякого числа n положительного и целого

$$\operatorname{cotg}\Pi\left(\frac{1}{2}c_{n-1}\right)=2\operatorname{cotg}\Pi\left(\frac{1}{2}c_n\right).$$

Откуда заключаем:

$$\operatorname{cotg}\Pi(y)=2^{n+1}\operatorname{cotg}\Pi\left(\frac{1}{2}c_n\right).$$

Если n число весьма великое и следовательно c_n число весьма малое, получим:

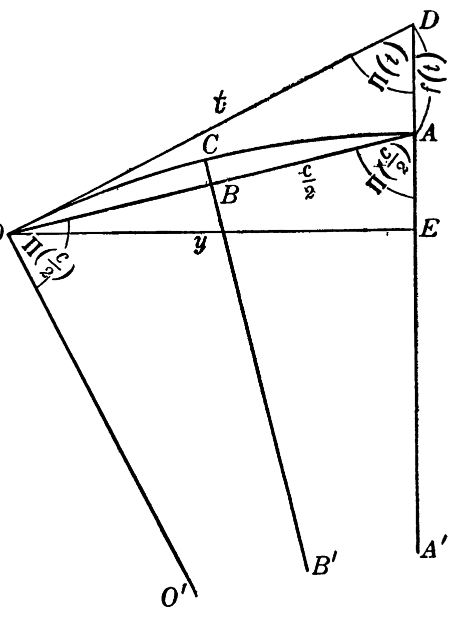
$$2^{n+1}\operatorname{cotg}\Pi\left(\frac{1}{2}c_n\right)=2^n c_n \text{ [271]}.$$

Но

$$2^n c_n = s \quad \text{для} \quad n=\infty,$$

откуда следует, что

$$s=\operatorname{cotg}\Pi(y). \qquad (22)$$



Черт. 21.

Определяем еще дугу s предельного круга (черт. 21) помощию t [272], части касательной $[OD]$, проведенной к предельному кругу в вершине $[O]$ оси $[OO']$ чрез конец дуги s между точкой прикосновения и точкой $[D]$ пересечения касательной с осью чрез другой конец дуги s, т. е. определяем функцию $L(t)$. В треугольнике, где бока c, t, $f(t)$ с противоположными углами $\Pi(t)$, $\pi-\Pi\left(\frac{1}{2}c\right)$, $\frac{1}{2}\pi-\Pi\left(\frac{1}{2}c\right)$, находим, применяя сюда уравнение (13) [273]

$$\sin\Pi(t)\operatorname{tang}\Pi(c)=\sin\Pi\left(\frac{1}{2}c\right)\operatorname{tang}\Pi(t);$$

но мы видели (уравнение 21), что

$$\operatorname{tang}\Pi\left(\frac{1}{2}c\right)=2\operatorname{tang}\Pi(y),$$

к чему прибавим еще замечание, что [274]

$$\operatorname{tang} \Pi(c) = \frac{\sin^2 \Pi\left(\frac{1}{2}c\right)}{2\cos \Pi\left(\frac{1}{2}c\right)}.$$

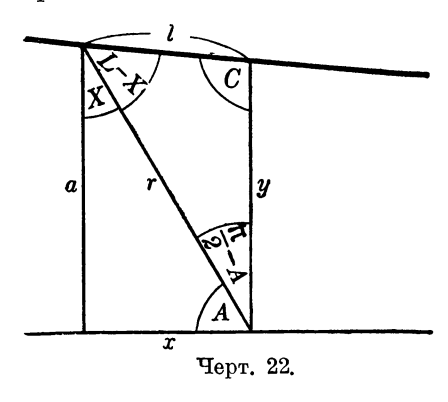
После чего

$$\cos \Pi(t) = 2 \operatorname{cotg} \Pi\left(\frac{1}{2}c\right),$$

т. е. вследствие уравнения (22) [275]

$$\cos \Pi(t) = s = L(t). \qquad [22a]$$

13. *Уравнение прямой линии* довольно сложно, если это уравнение должно быть общим и относится ко всякому положению прямой в отношении к осям координат. Опускаем из определенной точки на данной прямой перпендикул a (черт. 22) к оси x и называем L угол, который этот перпендикул делает с прямой. Называем еще y перпендикул, опущенный к оси x из другой точки на данной прямой. Пусть l расстояние второй точки от первой, и пусть x будет часть оси x между двух перпендикулов. Ведем прямую r от вершины a до конца y; составятся два треугольника: 1) прямоугольный, которого бока a, x, r с противоположными углами A, X, $\frac{\pi}{2}$, 2) с боками y, r, l с противоположными углами $L-X$, C, $\frac{\pi}{2}-A$. Применение уравнений (10), (11) к первому из этих треугольников дает:



Черт. 22.

$$\sin \Pi(x) \sin \Pi(a) = \sin \Pi(r),$$
$$\sin \Pi(x) \cos X = \sin A,$$
$$\sin \Pi(a) \cos A = \sin X,$$
$$\cos \Pi(r) \cos A = \cos \Pi(x),$$
$$\cos \Pi(r) \cos X = \cos \Pi(a).$$

Из этих уравнений выводим:

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{tang} A &= \operatorname{tang} \Pi(x) \cos \Pi(a), \\ \operatorname{tang} \Pi(r) &= \operatorname{tang} \Pi(x) \sin \Pi(a) \cos A, \\ \operatorname{tang} X &= \operatorname{tang} \Pi(a) \cos \Pi(x), \\ \cos \Pi(x) &= \cos \Pi(r) \cos A, \\ \sin X &= \sin \Pi(a) \cos A \end{aligned}\right\} \qquad [22b]$$

[276].

Применение последнего из уравнений (19) ко второму треугольнику дает:

$$\operatorname{cotg}(L-X)\cos A\sin\Pi(r)+\sin A=\frac{\cos\Pi(r)}{\cos\Pi(y)},$$

откуда следует, что:

$$\cos\Pi(y)=\frac{\cos\Pi(r)}{\operatorname{cotg}(L-X)\cos A\sin\Pi(r)+\sin A},$$

$$\cos\Pi(y)=$$
$$=\frac{\cos\Pi(r)(\operatorname{tang}L-\operatorname{tang}X)}{\{1+\operatorname{tang}L\operatorname{tang}X\}\cos A\sin\Pi(a)\sin\Pi(x)+\sin A\{\operatorname{tang}L-\operatorname{tang}X\}}\text{ [277]}.$$

Вставляя в это уравнение на место $\operatorname{tang}X$ его значение, получим

$$\cos\Pi(y)=\frac{\cos\Pi(r)\{\operatorname{tang}L-\operatorname{tang}\Pi(a)\cos\Pi(x)\}}{\{1+\operatorname{tang}L\operatorname{tang}\Pi(a)\cos\Pi(x)\}\cos A\sin\Pi(a)\sin\Pi(x)+\sin A\{\operatorname{tang}L-\operatorname{tang}\Pi(a)\cos\Pi(x)\}}.$$

Вставляем в это уравнение вместо $\cos\Pi(r)$ его значение, мы находим после всех приведений, что:

$$\cos\Pi(y)=\frac{\cos\Pi(a)}{\sin\Pi(x)}-\sin\Pi(a)\operatorname{cotg}\Pi(x)\operatorname{cotg}L\text{ [278]}. \qquad (23)$$

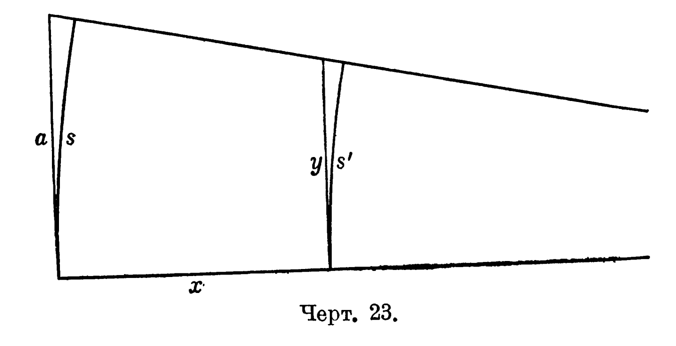
Если прямая параллельна с осью x, то $L=\Pi(a)$ и уравнение (23) примет вид:

$$\cos\Pi(y)=\frac{\cos\Pi(a)}{\sin\Pi(x)}-\frac{\cos\Pi(a)}{\operatorname{tang}\Pi(x)} \qquad [23a]$$

или

$$\cos\Pi(y)=\cos\Pi(a)\,e^{-x}\text{ [279]}. \qquad (24)$$

Если называем s, s' длину двух дуг предельного круга, заклю-



Черт. 23.

ченных между осью x и прямой с ней параллельной (черт. 23), и при том из которых дуг первая s, касательная к a в основании,

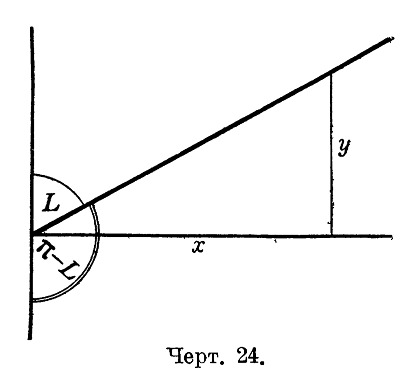
а вторая касательная к y в основании, то получим согласно с тем, что было доказано [280]

$$s = \cos \Pi (a),$$
$$s' = \cos \Pi (y),$$

после чего

$$s' = se^{-x},$$

где x расстояние между двух дуг s и s'. Это уравнение показывает, что постоянное E, введенное выше, чтобы означить содержание двух дуг предельного круга между двумя параллельными, дуг, которых расстояние равно единице, равняется e, т. е. основанию Неперовых логарифм[ов] [281].



Черт. 24.

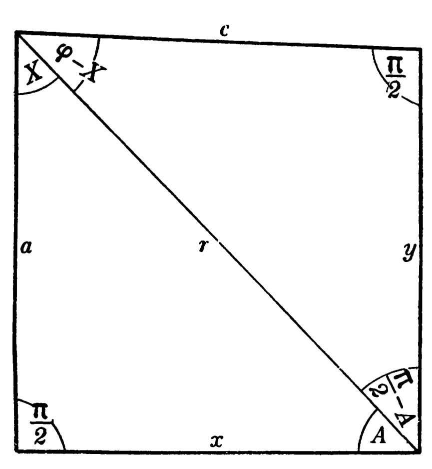
Если в уравнении (23) положим $a = 0$ и если ставим $\pi - L$ на место L, то получим:

$$\cos \Pi (y) = \operatorname{cotg} \Pi (x) \operatorname{cotg} L; \quad [24a]$$

это уравнение принадлежит прямой линии, которая проходит чрез начало координат x, делая угол $\frac{\pi}{2} - L$ с осью x (черт. 24), что согласуется с уравнением (10) [282].

VII. УРАВНЕНИЯ, СВЯЗЫВАЮЩИЕ ЭЛЕМЕНТЫ ЧЕТЫРЕХУГОЛЬНИКА С ТРЕМЯ ПРЯМЫМИ УГЛАМИ, И ИХ ПРИМЕНЕНИЕ

14. Рассматриваем четыреугольник (черт. 25), которого два бока a, y перпендикулярны к третьему боку x. Пусть c будет четвертый бок, а φ угол между a и c, тогда как угол между c и y прямой. Проводим диагонал r из вершины угла φ к вершине противоположного прямого угла. Этот диагонал делит четыреугольник на два прямоугольные треугольника; бока одного



Черт. 25.

из этих треугольников будут a, x, r с противоположными углами A, X, $\frac{\pi}{2}$, бока другого y, c, r с противоположными углами $\varphi - X$, $\frac{\pi}{2} - A$, $\frac{\pi}{2}$.

Применение уравнений (10), (11), (13) к первому из этих треугольников дает:

$$\left.\begin{aligned} &\sin \Pi(r) = \sin \Pi(a) \sin \Pi(x), \\ &\sin A \operatorname{tang} \Pi(a) = \sin X \operatorname{tang} \Pi(x), \\ &\cos \Pi(r) \cos A = \cos \Pi(x), \\ &\cos \Pi(r) \cos X = \cos \Pi(a); \end{aligned}\right\} \qquad (G)$$

второй треугольник дает таким же образом следующие уравнения:

$$\left.\begin{aligned}&\sin \Pi(y) \sin \Pi(c)=\sin \Pi(r),\\&\sin \Pi(y) \cos(\varphi - X)=\cos A,\\&\cos \Pi(r) \cos(\varphi - X)=\cos \Pi(c),\\&\cos \Pi(r) \sin A=\cos \Pi(y).\end{aligned}\right\} \qquad (H)$$

Уравнение (12), приложенное к первому треугольнику, дает:

$$\left.\begin{aligned}&\operatorname{tang} \Pi(r)=\sin X \operatorname{tang} \Pi(x),\\&\operatorname{tang} \Pi(r)=\sin A \operatorname{tang} \Pi(a),\end{aligned}\right\} \qquad (K)$$

тогда как применение того же уравнения ко второму треугольнику дает:

$$\left.\begin{aligned}&\operatorname{tang} \Pi(r)=\sin(\varphi - X) \operatorname{tang} \Pi(y),\\&\operatorname{tang} \Pi(r)=\cos A \operatorname{tang} \Pi(c).\end{aligned}\right\} \qquad (L)$$

Вставляя во второе из уравнений (K) на место $\sin \Pi(r)$ его значение, взятое из уравнений (G), находим:

$$\cos \Pi(r)=\frac{\sin \Pi(x) \cos \Pi(a)}{\sin A}.$$

Вставляя это значение $\cos \Pi(r)$ в последнее из уравнений (H), получим:

$$\cos \Pi(y)=\sin \Pi(x) \cos \Pi(a). \qquad (25)$$

Разделяя почленно последнее из уравнений (H) на третие из уравнений (G), получим:

$$\operatorname{tang} A=\frac{\cos \Pi(y)}{\cos \Pi(x)};$$

вставляем в это уравнение на место $\cos \Pi(y)$ его значение из (25); будет:

$$\operatorname{tang} A=\operatorname{tang} \Pi(x) \cos \Pi(a).$$

Деление второго из уравнений (G) на последнее из этих же уравнений почленно дает:

$$\frac{\operatorname{tang} X \operatorname{tang} \Pi(x)}{\cos \Pi(r)}=\frac{\sin A \operatorname{tang} \Pi(a)}{\cos \Pi(a)}.$$

Вставляя в это уравнение на место $\sin A$ его значение, взятое из последнего в уравнениях (H), получим:

$$\operatorname{tang} X=\frac{\cos \Pi(y) \operatorname{tang} \Pi(a)}{\cos \Pi(a)} \operatorname{cotg} \Pi(x).$$

Заменяя в этом уравнении $\cos \Pi(y)$ его значением, найденным выше, получим:

$$\operatorname{tang} X=\cos \Pi(x) \operatorname{tang} \Pi(a).$$

Соединение [283] второго из уравнений (H) с первым из уравнений (L) дает еще:

$$\operatorname{tang}(\varphi - X)\frac{\operatorname{tang}\Pi(y)}{\sin\Pi(y)} = \frac{\operatorname{tang}\Pi(r)}{\cos A}$$

или

$$\operatorname{tang}(\varphi - X) = \frac{\cos\Pi(y)\operatorname{tang}\Pi(r)}{\cos A},$$

а если мы вставим значение $\operatorname{tang}\Pi(r)$ из второго в уравнениях (K), то получим:

$$\operatorname{tang}(\varphi - X) = \operatorname{tang} A \operatorname{tang}\Pi(a)\cos\Pi(y).$$

Это уравнение, когда сюда поставятся на место $\operatorname{tang} A, \operatorname{tang} X$ их значения, найденные выше, примет следующий вид:

$$\operatorname{tang}\varphi = \frac{\operatorname{tang}\Pi(a)}{\cos\Pi(x)}. \qquad (26)$$

Это уравнение показывает, что x всегда возможно, покуда угол φ больше $\Pi(a)$ и менее $\frac{\pi}{2}$, или

$$\pi - \varphi > \Pi(a); \quad \Pi - \varphi < \frac{\pi}{2}.$$

Значение $\cos\Pi(x)$ положительно, если

$$\frac{\pi}{2} > \varphi > \Pi(a)$$

и линия x следовательно тоже положительна.

Но если $\frac{\pi}{2} > \pi - \varphi > \Pi(a)$, то значение $\cos\Pi(x)$ делается отрицательным и линия x лежит по другую сторону перпендикула a.

Это доказывает, что если две прямые линии, лежащие в одной плоскости, не встречаются, как бы далеко не продолжались, не будучи однако ж параллельными, то они обе бывают перпендикулярны к одной прямой; всякие две прямые линии, которые, находясь в одной плоскости, ни параллельны ни перпендикулярны к одной прямой, должны необходимо пересекаться.

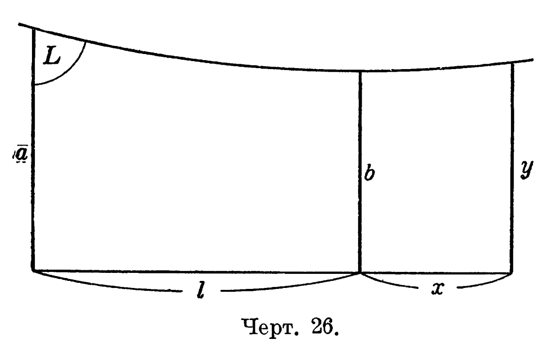
15. Прямые линии в одной плоскости пересекаются взаимно по достаточному продолжению, если угол между одной прямой и перпендикулом из произвольной ее точки, опущенный на другую прямую, менее нежели угол параллельности, который соответствует длине этого перпендикула. С помощию последних предложений можно значительно упростить общее уравнение прямой линии (23) в случае, когда прямая, к которой относится уравнение, не пересекает оси x.

Пусть a будет перпендикул, опущенный к оси x из точки постоянной, но произвольной на данной прямой. Пусть L тот из двух углов между прямой и этим перпендикулом, который лежит на стороне x-ов положительных (черт. 26).

Определяем наперед так линию l, чтобы:

$$\cos \Pi (l) = \operatorname{tang} \Pi (a) \operatorname{cotg} L. \qquad [26a]$$

Это всегда возможно, покуда $L > \Pi (a)$, т. е. покуда прямая не пересекает ось x-ов [284]. Полагаем эту линию l на ось x-ов от начала координат на стороне x-ов положительных или отрицательных, смотря по знаку l. Восставляем на конце линии l перпендикул к оси x-ов, продолжаем его до пересечения с данной прямой, и пусть b будет часть этого перпендикула между данной прямой и осью x-ов. Угол, под которым этот перпендикул встречает данную прямую, должен быть прямой, согласно с уравнением (26). Если теперь конец перпендикула b принимаем за начало координат, то будем иметь согласно с уравнением (25):



Черт. 26.

$$\cos \Pi (b) = \cos \Pi (y) \sin \Pi (x), \qquad (27)$$

что и будет общее уравнение прямой, которая не пересекает ось x-ов.

В этом уравнении можем полагать $y = a$ и вместе с тем $x = -l$; это дает [285]:

$$\cos \Pi (b) = \cos \Pi (a) \sin \Pi (l);$$

если сюда поставим вместо $\cos \Pi (b)$, $\sin \Pi (l)$ их значения, то уравнение сделается:

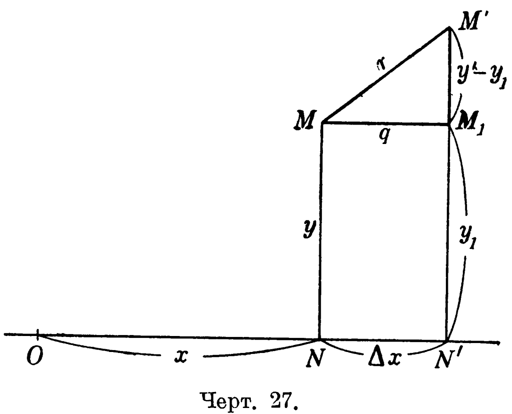
$$\cos \Pi (y) \sin \Pi (x) = \cos \Pi (a) \sqrt{1 - \operatorname{tang}^2 \Pi (a) \operatorname{cotg}^2 L}.$$

Вторая часть в этом уравнении делается воображаемой, как скоро $\operatorname{tang} \Pi (a) \operatorname{cotg} L > 1$, т. е. для всякой прямой, которая пересекает ось x-ов.

После того, что до сих пор найдено, можем решить задачу: определить *расстояние двух точек*, которых положение в плоскости дано помощью их прямоугольных координат: x, y и x', y'. Положим для сокращения

$$\Delta x = x' - x; \quad \Delta y = y' - y.$$

Опускаем из вершины y (черт. 27) перпендикул к y' и означаем длину этого перпендикула q, тогда как y_1 означает часть y' между осью x-ов и перпендикулом q.



Черт. 27.

Согласно с уравнением (25), будет:

$$\cos \Pi (y_1) = \\ = \cos \Pi (y) \sin \Pi (\Delta x),$$

$$\cos \Pi (\Delta x) = \\ = \cos \Pi (q) \sin \Pi (y_1).$$

Помощью этих уравнений определив значения y_1 и q, искомое расстояние двух точек, которое означаем r, будет дано следующим уравнением, которое выводится из уравнения (11)

$$\sin \Pi (r) = \sin \Pi (y' - y_1) \sin \Pi (q).$$

VIII. ВЫЧИСЛЕНИЕ ДЛИНЫ ДУГИ ПЛОСКОЙ КРИВОЙ

16. Если Δx и Δy, а следовательно q, r весьма малы, так что можно пренебречь их высшими степенями в сравнении с низшими, то r представит элемент ds кривой линии, к выражению которого приходим, взяв:

$$\sin \Pi(q) = 1 - \frac{1}{2} q^2,$$

$$\cos \Pi(q) = q - \frac{1}{3} q^3,$$

$$\sin \Pi(r) = 1 - \frac{1}{2} r^2,$$

$$\sin \Pi(y' - y_1) = 1 - \frac{1}{2}(y' - y_1)^2,$$

после чего выходит

$$q = \frac{\Delta x}{\sin \Pi(y)},$$

$$ds = \sqrt{dy^2 + \frac{dx^2}{\sin^2 \Pi(y)}} \quad [286]. \qquad [A]$$

Для предельного круга:

$$\sin \Pi(y) = e^{-x} \quad [287].$$

Из общих выражений, которые определяют $\sin \Pi(a)$ и т. д. помощью a и которые даны выше, выходит:

$$d\Pi(a) = -\sin \Pi(a)\, da \quad [288]; \qquad [I]$$

после чего, дифференцируя уравнение предельного круга, находим:

$$\sin \Pi(y) \cos \Pi(y)\, dy = e^{-x} dx$$

и

$$ds = \frac{dx\, e^x}{\sqrt{1 - e^{-2x}}} \quad [289]. \qquad [A']$$

Интегрируя в отношении x от $x = 0$, находим:

$$s = \sqrt{e^{2x} - 1}$$

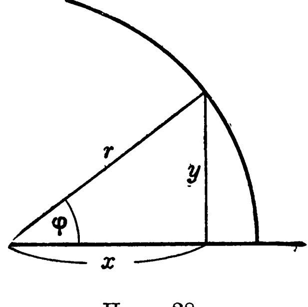
или иначе

$$s = \operatorname{cotg} \Pi(y),$$

как это было найдено выше.

Если означим r расстояние точки до круговой линии от начала координат, а φ угол, который это расстояние r делает с осью x-ов положительных (черт. 28), то мы находим в прямоугольном треугольнике, которого стороны y, x, r согласно с уравнением (12):

$$\operatorname{tang}\Pi(r) = \sin\varphi \operatorname{tang}\Pi(y).$$



Черт. 28.

Взяв логарифмы на обеих сторонах этого уравнения и дифференцируя в отношении к r, φ, y, получим:

$$\frac{dr}{\cos\Pi(r)} = -\operatorname{cotg}\varphi\, d\varphi + \frac{dy}{\cos\Pi(y)}.$$

Из этого уравнения выводим:

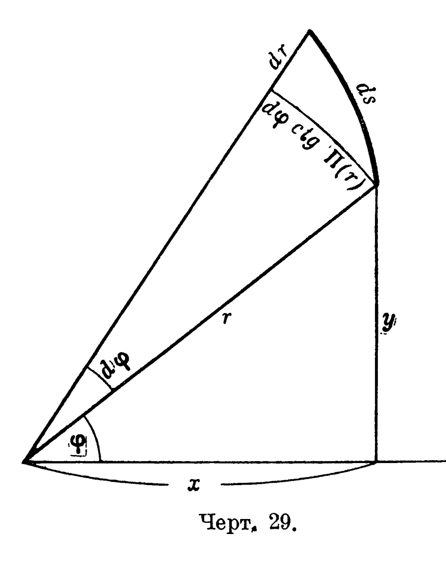
$$dy = \left\{\operatorname{cotg}\varphi\, d\varphi + \frac{dr}{\cos\Pi(r)}\right\}\cos\Pi(y), \quad [27a]$$

или вставляя на место $\cos\Pi(y)$ его значение помощью φ и r:

$$dy = \frac{\cos\varphi\cos\Pi(r)\,d\varphi + \sin\varphi\, dr}{\sqrt{1-\cos^2\varphi\cos^2\Pi(r)}} \quad [29^{\circ}].$$

Чтобы выразить dx помощью r, φ, берем уравнение (10) [291]

$$\cos\Pi(r)\cos\varphi = \cos\Pi(x).$$



Черт. 29.

Дифференцируя логарифмы обеих частей этого уравнения в отношении к r, φ, x, получим:

$$\frac{\sin^2\Pi(r)\,dr}{\cos\Pi(r)} - \operatorname{tang}\varphi\, d\varphi =$$

$$= \frac{\sin^2\Pi(x)\,dx}{\cos\Pi(x)}, \quad [27b]$$

откуда выводим помощью уравнений:

$$\sin\Pi(x)\sin\Pi(y) = \sin\Pi(r),$$

$$\cos\Pi(r)\cos\varphi = \cos\Pi(x),$$

следующее уравнение, которое выражает искомое значение dx:

$$\frac{dx}{\sin\Pi(y)} = \frac{\cos\varphi\sin\Pi(r)\,dr - \sin\varphi\operatorname{cotg}\Pi(r)\,d\varphi}{\sqrt{1-\cos^2\varphi\cos^2\Pi(r)}} \quad [29^{\circ}],$$

после чего (черт. 29)

$$ds = \sqrt{dr^2 + d\varphi^2\operatorname{cotg}^2\Pi(r)}. \quad [B]$$

Для круга, полагая, что начало координат в центре, находим, так как здесь $dr = 0$:

$$ds = d\varphi \operatorname{cotg} \Pi(r).$$

Интегрируя от $\varphi = 0$ до $\varphi = \frac{\pi}{2}$ и умножая все потом на 4, находим следующее выражение для окружности с полупоперечником r:

$$2\pi \operatorname{cotg} \Pi(r)$$

согласно с тем, что было найдено выше.

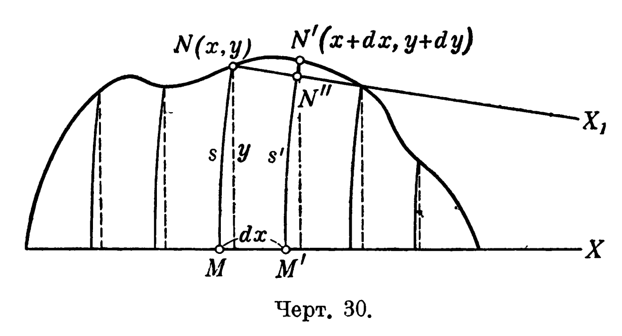
Если называем s дугу предельного круга от оси x-ов, то вращение s около оси x-ов производит часть предельной сферы, а конец дуги опишет окружность круга, которая на предельной сфере определяется так же, как окружность круга с полупоперечником s определяется на плоскости в обыкновенной геометрии; отсюда следует, что окружность этого круга должна быть равна $2\pi s$. С другой стороны окружность того же круга, рассматриваемая в его плоскости, где перпендикул y, опущенный от конца дуги s на ось предельного круга, которая служит осью x-ов и проходит чрез другой конец дуги, составляет полупоперечник круга, дается в пангеометрии выражением:

$$2\pi \operatorname{cotg} \Pi(y);$$

откуда следует, что $s = \operatorname{cotg} \Pi(y)$, как доказано было прежде.

IX. ВЫЧИСЛЕНИЕ ПЛОЩАДЕЙ ПЛОСКИХ ФИГУР

17. Чтобы разделить площадь на элементы, ведем по площади дуги предельного круга, для которых осью служит ось x-ов и таким образом, что их взаимное расстояние бесконечно мало и может быть названо dx (черт. 30). Пусть s одна из этих дуг $[MN]$



Черт. 30.

предельного круга между осью x-ов и точкой на кривой линии, которой координаты x, y; пусть s' — дуга другого из этих предельных кругов $[M'N']$ между осью x-ов и точкой $[N']$ на той же кривой, которой координаты $x+dx$, $y+dy$.

Часть площади бесконечно малая заключенная между s и s' с одной стороны и осью x-ов и кривой с другой стороны выразится:

$$dS = \frac{es\,dx}{e-1}\ [293], \qquad [a]$$

куда вставляя $s = \operatorname{cotg} \Pi(y)$ [294], получим:

$$dS = \frac{e\,dx \operatorname{cotg} \Pi(y)}{e-1}. \qquad [b]$$

Для примера определяем площадь предельного круга (черт. 31), для которого нашли мы уравнение в прямоугольных координатах:

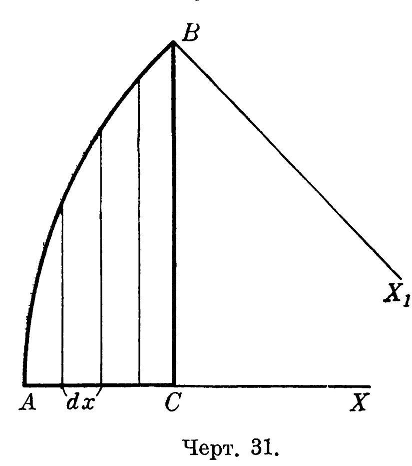
$$\sin \Pi(y) = e^{-x}\ [295],$$

помощью которого уравнения находим выражение для элемента искомой площади:

$$dS = \frac{e}{e-1}\, dy \cos \Pi(y) \operatorname{cotg} \Pi(y) \text{ [296]}.$$

Интегрируя это выражение от $y=0$, находим площадь $[ABC]$, ограниченную дугою предельного круга, осью x-ов и ординатою y

$$S = \frac{e}{e-1}\left\{\operatorname{cotg} \Pi(y) - \frac{1}{2}\pi + \Pi(y)\right\} \text{[297]}.$$



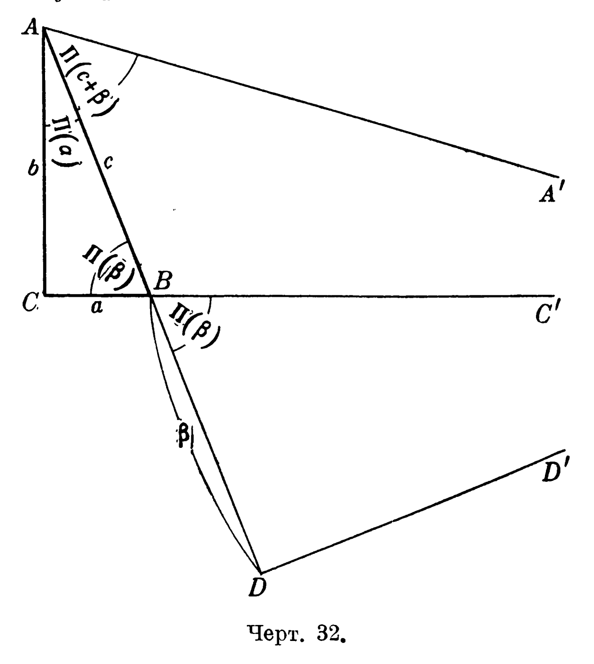
Черт. 31.

Мы видели, что площадь между двух параллельных, продолжаемая до бесконечности на стороне параллельности и ограниченная дугою предельного круга, которой дуге две параллельные служат осями, выражается [298]:

$$\frac{es}{e-1} = \frac{e \operatorname{cotg} \Pi(y)}{e-1},$$

после чего находим площадь между двух прямых параллельных, из которых одна перпендикулярна к y, которые проведены чрез концы y и продолжены до бесконечности, выражение

$$\frac{1}{2}\pi - \Pi(y) \text{ [299]}. \quad [27c]$$



Черт. 32.

Помощью этого выражения находим площадь прямолинейного прямоугольного треугольника, когда даны острые углы $\Pi(\alpha)$, $\Pi(\beta)$ против перпендикулярных боков a, b треугольника (черт. 32). Продолжаем гипотенузу c за вершину $[B]$ угла $\Pi(\beta)$ и продолжение $[BD]$ делаем равно β. Перпендикул $[DD']$ в конце β делается параллельным с продолжением бока a. Площадь $[D'DBC']$, бесконечно простирающаяся между

этими двумя параллельными, продолженными в сторону параллельности, и ограниченная с другой стороны линиею β, будет

$$\frac{1}{2}\pi - \Pi(\beta).$$

Если ведем теперь чрез вершину [A] угла $\Pi(\alpha)$ параллельную с перпендикулом [DD'] и, которая наклонена к боку c под углом $\Pi(c+\beta)$ и будет вместе параллельна с продолжением бока a, то величина площади [$D'DAA'$] между $c+\beta$ [AD] и двумя параллельными чрез концы $c+\beta$, проведенными и продолженными до бесконечности на стороне параллельности, будет:

$$\frac{1}{2}\pi - \Pi(c+\beta).$$

Подобным образом часть площади [$A'ACC'$] между боком b, прямой [AA'], проведенной чрез вершину $\Pi(\alpha)$, и боком a [CB], бесконечно продолженным, будет:

$$\frac{1}{2}\pi - \Pi(b).$$

После чего сумма $\frac{1}{2}\pi - \Pi(\beta)$, $\frac{1}{2}\pi - \Pi(b)$ уменьш[енн]ая [на] $\frac{1}{2}\pi - \Pi(c+\beta)$, будет выражение площади треугольника [ABC], которую таким образом находим $= \frac{1}{2}\pi - \Pi(b) - \Pi(\beta) + \Pi(c+\beta)$. Между тем мы доказали, что $\Pi(b) = \Pi(\alpha) + \Pi(c+\beta)$ [300]; поставя отсюда в выражение площади треугольника на место $\Pi(b)$ его значение, находим площадь прямоугольного прямолинейного треугольника:

$$\frac{1}{2}\pi - \Pi(\alpha) - \Pi(\beta);$$

это значит, что площадь прямолинейного прямоугольного треугольника равна разности двух прямых углов без суммы трех углов треугольника. Отсюда следует еще, что площадь всякого прямолинейного треугольника равна избытку двух прямых углов над суммою трех углов треугольника.

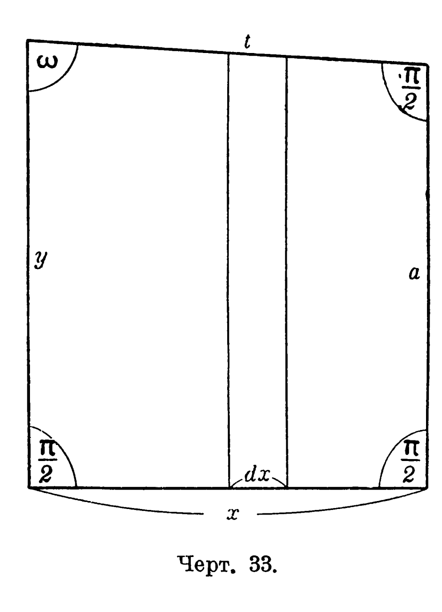
Легко вывести из предыдущего, что площадь всякого четыреугольника равна избытку четырех прямых углов над суммою четырех углов четыреугольника и вообще *площадь многоугольника n сторон равна избытку* $(n-2)\pi$ *над суммою углов многоугольника.*

18. Рассматриваем особенно четыреугольник, которого два бока a, y оба перпендикулярны к третьему боку x и которого

четвертый бок t перпендикулярен к боку a и делает с y угол, который означим ω (черт. 33) [301].

Мы доказали выше (уравнение 25), что между составными частями такого четыреугольника существует уравнение

$$\cos \Pi(a) = \cos \Pi(y) \sin \Pi(x);$$



Черт. 33.

если рассматриваем x и y переменными и a постоянным, то площадь этого четыреугольника выражается, как и всякая площадь, как доказано выше, интегралом

$$\int dx \operatorname{cotg} \Pi(y) \text{ [302]}, \qquad [27d]$$

который, будучи приложен к настоящему случаю, дает, когда поставим сюда значение $\operatorname{cotg} \Pi(y)$ [303], следующее выражение для площади:

$$\int_0 \frac{dx \cos \Pi(a)}{\sqrt{\sin^2 \Pi(x) - \cos^2 \Pi(a)}},$$

тогда как площадь этого четыреугольника, согласно с тем, как определяется площадь всякого многоугольника помощию углов, $= \frac{1}{2}\pi - \omega$. Это дает:

$$\frac{1}{2}\pi - \omega = \cos \Pi(a) \int_0 \frac{dx}{\sqrt{\sin^2 \Pi(x) - \cos^2 \Pi(a)}}. \qquad (M)$$

Угол ω, который делает бок t с боком y, определяется уравнением (уравнение 26)

$$\operatorname{tang} \omega = \frac{\operatorname{tang} \Pi(y)}{\cos \Pi(x)}.$$

Если в уравнении (M) пишем α вместо $\Pi(a)$, ξ на место $\Pi(x)$, оно сделается

$$\frac{\frac{1}{2}\pi - \omega}{\cos \alpha} = \int_{\frac{\pi}{2}} \frac{d\xi}{\sin \xi \sqrt{\sin^2 \alpha - \cos^2 \xi}} \text{ [304]},$$

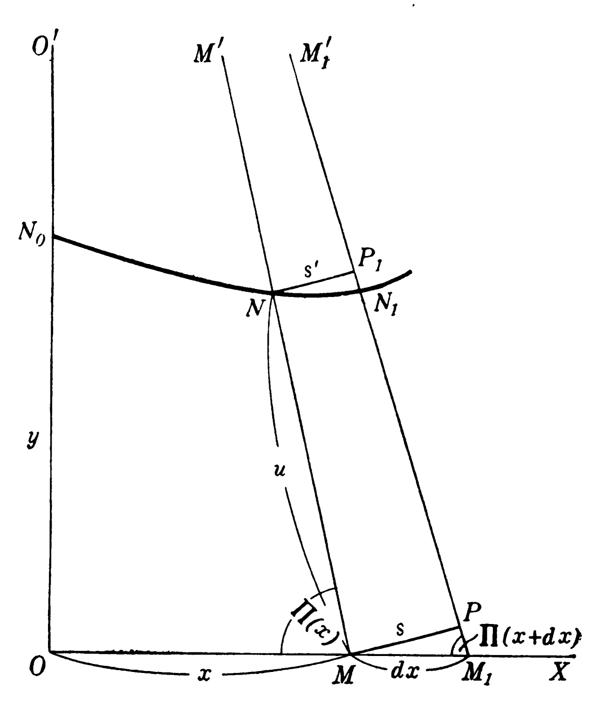
где α величина постоянная.

Справедливость этого выражения для интеграла может быть поверена дифференцированием. Пангеометрия указывает также

на новый способ приближения к значениям определенных интегралов [305].

Площадь между двумя параллельными, проведенными чрез концы данной прямой, продолженными до бесконечности на стороне параллельности, и самой прямой будет $= \pi -$ [минус] сумма двух углов, которые две параллельных делают с данной прямой, потому что эта площадь может быть принимаема за площадь треугольника, в котором один угол равен нулю.

Площадь кривой линии [306] может быть разделена на элементы прямыми параллельными к одной и той же данной прямой, например, к оси y (черт. 34). Если ведем на конце абсциссы x параллельную [MM'] к оси y, то эта прямая делает с осью x угол $= \Pi(x)$; прямая, проведенная через конец абсциссы $x + dx$, делает таким



Черт. 34.

же образом с осью x угол $= \Pi(x + dx)$, откуда следует, что площадь между этими двумя параллельными и dx равна $-d\Pi(x)$ [307]. Пусть теперь u будет величина первой параллельной между осью x и кривой; та часть площади между двумя параллельными, которая лежит вне данной кривой, будет вследствие выше доказанного

$$-e^{-u}\, d\Pi(x) \text{ [308]},$$

откуда следует, что часть этой площади, которая лежит между кривою и осью x, т. е. элемент площади кривой, выразится

$$dS = -(1 - e^{-u})\, d\Pi(x). \qquad [27e]$$

Чтобы вычислить площадь круга с полупоперечником r, надобно в общее выражение элемента площади кривой, найденное выше,

$$dS = dx \operatorname{cotg} \Pi(y),$$

поставить значение $\operatorname{cotg} \Pi(y)$ из уравнения круга:

$$\sin \Pi(x) \sin \Pi(y) = \sin \Pi(r),$$

где начало прямоугольных координат в центре круга. Это дает

$$dS = dx \sqrt{\frac{\sin^2 \Pi(x)}{\sin^2 \Pi(r)} - 1};$$

интегрируя от $x = 0$, находим:

$$S = \frac{1}{\sin \Pi(r)} \arcsin \left\{\frac{\cos \Pi(x)}{\cos \Pi(r)}\right\} - \arcsin \left\{\frac{\operatorname{cotg} \Pi(x)}{\operatorname{cotg} \Pi(r)}\right\} [309].$$

Для $x = r$ это дает площадь четверти круга:

$$\frac{\pi}{2 \sin \Pi(r)} - \frac{\pi}{2};$$

умножая на 4, находим для площади целого круга

$$2\pi \left\{\frac{1}{\sin \Pi(r)} - 1\right\}$$

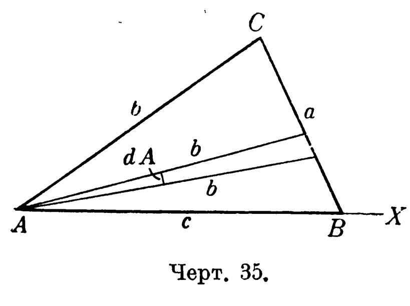
или что все равно:

$$\pi \{e^{\frac{r}{2}} - e^{-\frac{r}{2}}\}^2.$$

Если r чрезвычайно мало, то это выражение дает площадь круга $= \pi r^2$; то же самое выражение, которое обыкновенно дается для площади круга в Геометрии.

19. Помощию предыдущего выражения площади круга можно дать элементу площади всякой кривой линии еще такое выражение:

$$dS = d\varphi \left\{\frac{1}{\sin \Pi(r)} - 1\right\}, \qquad [27f]$$



Черт. 35.

где r есть радиус вектор, проведенный из начала координат к точке на кривой, а φ угол, который этот радиус вектор делает с постоянной прямой, проходящей чрез начало координат [черт. 29 на стр. 179].

Применение этого выражения к вычислению площади треугольника (черт. 35), которого бока a, b, c с противоположными

углами A, B, C дает, если рассматриваем A, C и стороны a, b как переменные [310]:

$$\text{площадь треугольника} = \int_0^A dA \left\{ \frac{1}{\sin \Pi(b)} - 1 \right\}.$$

Бок b выражается в функции c, A, B помощию последнего уравнения (19)

$$\operatorname{cotg} B \sin A \sin \Pi(c) + \cos A = \frac{\cos \Pi(c)}{\cos \Pi(b)}.$$

Берем из этого уравнения значение $\sin \Pi(b)$ и ставим его в выражение для площади треугольника, получаем:

площадь треугольника =

$$= \int_0^A \frac{dA}{\sqrt{1 - \dfrac{\cos^2 \Pi(c)}{(\operatorname{cotg} B \sin A \sin \Pi(c) + \cos A)^2}}} - A.$$

Между тем было доказано, что площадь треугольника

$$= \pi - A - B - C,$$

где A и B углы данные и C определяется уравнением (19)

$$\cos C + \cos A \cos B = \frac{\sin A \sin B}{\sin \Pi(c)}.$$

Сравнение этих двух выражений для площади треугольника дает:

$$\pi - B - C = \int_0^A \frac{dA \{ \operatorname{cotg} B \sin A \sin \Pi(c) + \cos A \}}{\sqrt{(\operatorname{cotg} B \sin A \sin \Pi(c) + \cos A)^2 - \cos^2 \Pi(c)}}.$$

Если $B = \frac{\pi}{2}$, это уравнение дает:

$$\frac{\pi}{2} - C = \int_0^A \frac{dA \cos A}{\sqrt{\cos^2 A - \cos^2 \Pi(c)}}$$

— уравнение, которое после интегрирования принимает вид:

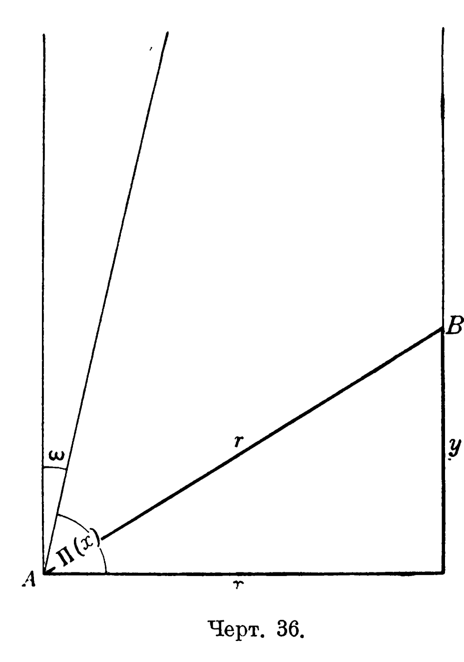
$$\frac{1}{2}\pi - C = \arcsin \left(\frac{\sin A}{\sin \Pi(c)} \right),$$

что согласно с уравнением, которое определяет C.

Из того, что было доказано впереди, можно вывести для выражения площади всякого замкнутого многоугольника два выражения, одно выраженное определенным интегралом, другое зависящее только от суммы углов многоугольника.

Два значения для той же площади, будучи необходимо равными, доставляют способ вычислять определенные интегралы, которых значение было бы затруднительно найти другим образом.

Чтобы представить еще пример, рассматриваем прямолинейный прямоугольный треугольник, в котором перпендикулярные бока x, y, а гипотенуза r (черт. 36). Пусть A угол против y, B угол против x. Уравнения (10), (11) дают для такого треугольника:



Черт. 36.

$$\sin \Pi (x) \sin \Pi (y) = \sin \Pi (r),$$
$$\sin \Pi (x) \cos B = \sin A,$$
$$\cos \Pi (r) \cos A = \cos \Pi (x),$$
$$\cos \Pi (r) \cos B = \cos \Pi (y).$$

Из этих уравнений выведем:

$$\cos \Pi (r) = \frac{\cos \Pi (x)}{\cos A},$$

$$\sin \Pi (r) = \sqrt{1 - \left(\frac{\cos \Pi (x)}{\cos A}\right)^2},$$

$$\sin \Pi (y) = \frac{1}{\sin \Pi (x)} \sqrt{1 - \left(\frac{\cos \Pi (x)}{\cos A}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{\sin^2 \Pi (x)} - \frac{\operatorname{cotg}^2 \Pi (x)}{\cos^2 A}},$$

$$\operatorname{cotg} \Pi (y) = \frac{\sin A \cos \Pi (x)}{\sqrt{\cos^2 A - \cos^2 \Pi(x)}} \ [311].$$

Вставляя в это последнее уравнение $\Pi (x) = \frac{\pi}{2} - \omega$, находим:

$$\operatorname{cotg} \Pi (y) = \frac{\sin A \sin \omega}{\sqrt{\cos^2 A - \sin^2 \omega}}.$$

Между тем мы видели, что дифференциал площади есть $dx \operatorname{cotg} \Pi (y)$; а это дает в настоящем случае:

$$dx \operatorname{cotg} \Pi (y) = \sin A \frac{d\omega \operatorname{tang} \omega}{\sqrt{\cos^2 A - \sin^2 \omega}} \ [312];$$

откуда заключаем, интегрируя от $\omega = 0$, что соответствует $x = 0$ и замечая, что площадь выраженная интегралом выражается также чрез $\frac{\pi}{2} - A - B$, что

$$\frac{\pi}{2} - A - B = \sin A \int^{\omega} \frac{\operatorname{tang} \omega \, d\omega}{\sqrt{\cos^2 A - \sin^2 \omega}},$$

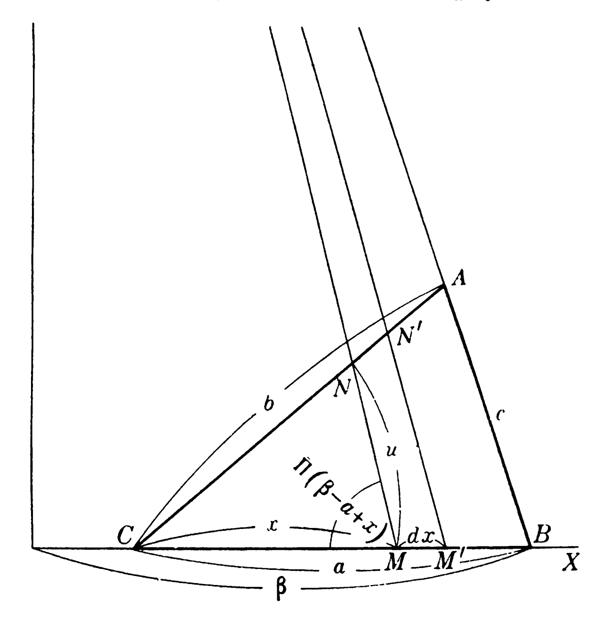
где A угол постоянный, а B определяется уравнением

$$\cos B = \frac{\sin A}{\cos \omega}.$$

Если $\omega = \frac{\pi}{2} - A$, то гипотенуза делается параллельною боку y и угол $B = 0$. Итак в этом случае

$$\frac{\pi}{2} - A = \sin A \int\limits_0^{\frac{\pi}{2} - A} \frac{\operatorname{tang} \omega \, d\omega}{\sqrt{\cos^2 A - \sin^2 \omega}}.$$

Можно определить значение интеграла в более общем виде, рассматривая площадь прямолинейного треугольника, которого



Черт. 37.

бока a, b, c с противоположными углами A, B, C и разделяя эту площадь на элементы прямыми параллельными между собою. Берем вершину угла C (черт. 37) за начало координат и сторону a за ось x-ов. Пусть $B = \Pi(\beta)$, где β положительная если $B < \frac{\pi}{2}$ и отрицательная если $B > \frac{\pi}{2}$. Ведем чрез конец $[M]$ абсциссы x прямую u $[MN]$ параллельную боку c, и продолжаем до пересечения с боком b. Угол, который эта параллельная делает с абсциссою x [318], будет $\Pi(\beta - a + x)$, откуда следует, что угол, который делает эта параллельная с продолжением x,

будет $\Pi(a-\beta-x)$. Если возьмем за элемент площади треугольника часть этой площади, которая заключена между двумя параллельными u бесконечно близкими, то получим, вследствие того, что было доказано выше, следующее выражение для этого элемента:

$$dS=-d\Pi(a-\beta-x)\{1-e^{-u}\}\ [^{314}].$$

Рассматриваем y, x, u как переменные, а a и β как постоянные.

Уравнения (19) [315] будучи применены к треугольнику, которого бока x, u, а угол между этими двумя боками $\Pi(\beta-a+x)$, дают:

$$\operatorname{cotg} C \sin\Pi(\beta-a+x)\sin\Pi(x)+\cos\Pi(\beta-a+x)=\frac{\cos\Pi(x)}{\cos\Pi(u)};$$

из этого уравнения выводим, положив для краткости $\Pi(\beta-a+x)=\omega$,

$$\cos\Pi(u)=\frac{\cos\Pi(x)}{\operatorname{cotg} C\sin\omega\sin\Pi(x)+\cos\omega},$$

$$e^{2u}=\frac{\operatorname{cotg} C\sin\omega\sin\Pi(x)+\cos\omega+\cos\Pi(x)}{\operatorname{cotg} C\sin\omega\sin\Pi(x)+\cos\omega-\cos\Pi(x)}\ [^{316}];$$

но

$$\sin\Pi(x)=\sin\Pi\{(\beta-a)-(\beta-a+x)\}=\frac{\sin\Pi(\beta-a)\sin\omega}{1-\cos\Pi(\beta-a)\cos\omega}.$$

Таким же образом находим:

$$\cos\Pi(x)=\frac{\cos\Pi(\beta-a)-\cos\omega}{1-\cos\Pi(\beta-a)\cos\omega}\ [^{317}].$$

Вставляя эти значения $\sin\Pi(x)$, $\cos\Pi(x)$ в выражение для e^{2u}, получим:

$$e^{2u}=\frac{\operatorname{cotg} C\sin^2\omega\sin\Pi(\beta-a)+\cos\omega\{1-\cos\Pi(\beta-a)\cos\omega\}+\cos\Pi(\beta-a)-\cos\omega}{\operatorname{cotg} C\sin^2\omega\sin\Pi(\beta-a)+\cos\omega\{1-\cos\Pi(\beta-a)\cos\omega\}-\cos\Pi(\beta-a)+\cos\omega}=$$

$$=\frac{\operatorname{cotg} C\sin^2\omega\sin\Pi(\beta-a)+\cos\Pi(\beta-a)\sin^2\omega}{\operatorname{cotg} C\sin^2\omega\sin\Pi(\beta-a)+2\cos\omega-\{1+\cos^2\omega\}\cos\Pi(\beta-a)};$$

далее находим:

$$d\Pi(a-\beta-x)=-d\Pi(\beta-a+x)=-d\omega,$$

после чего сравнение двух выражений для площади треугольника дает уравнение:

$$\pi-A-B-C=$$

$$=-\omega+\int\limits_{x=0}^{x=a}d\omega\sqrt{\frac{\operatorname{cotg} C\sin^2\omega\sin\Pi(\beta-a)+2\cos\omega-(1+\cos^2\omega)\cos\Pi(\beta-a)}{\operatorname{cotg} C\sin^2\omega\sin\Pi(\beta-a)+\cos\Pi(\beta-a)\sin^2\omega}}.$$

Если положим еще $\Pi(\beta - a) = \alpha$, то это уравнение принимает вид:

$$[\pi - A - B - C + \alpha - \Pi(\beta)] [\operatorname{cotg} C \sin\alpha + \cos\alpha]^{1/2} =$$

$$= \int\limits_{\omega=\alpha}^{\omega=\Pi(\beta)} \frac{d\omega}{\sin\omega} \sqrt{\operatorname{cotg} C \sin^2\omega \sin\alpha + 2\cos\omega - (1 + \cos^2\omega)\cos\alpha},$$

где углы A, B и линия β должны быть вычислены посредством уравнений:

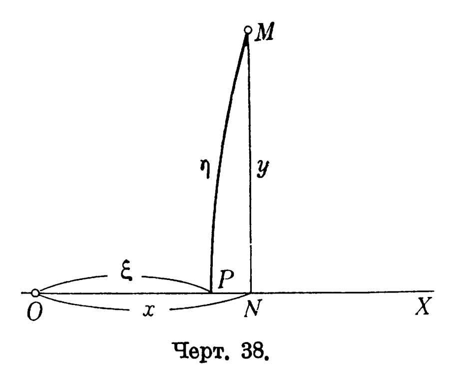
$$\alpha = \Pi(\beta - a); \quad B = \Pi(\beta),$$

$$\cos A + \cos B \cos C = \frac{\sin B \sin C}{\sin \Pi(a)}.$$

Последнее из этих уравнений есть последнее из уравнений (19), примененное к треугольнику, который рассматривали.

X. ПРЕДЕЛЬНЫЕ КООРДИНАТЫ

20. Чтобы определять положение точки в плоскости, можно употреблять в пангеометрии не только прямые и полярные координаты, но также и дуги предельного круга. Даже эта последняя система представляет свои выгоды в отношении к простоте выражений. Определяем положение точки [M] (черт. 38)



Черт. 38.

в плоскости помощью перпендикулярных координат x и y так, что y был бы перпендикул из точки, положение которой хотят определять, на ось x-ов, а x часть оси x-ов от конца перпендикула [N] до начала координат. Пусть η длина дуги [PM] предельного круга от данной точки до оси x-ов, которая вместе служит осью предельному кругу; называем ξ расстояние [OP] вершины предельного круга на оси x-ов до начала координат. Мы видели, что в этом случае

$$\eta = \operatorname{cotg} \Pi(y),$$

потом уравнение предельного круга дает [318]

$$e^{-(x-\xi)} = \sin \Pi(y);$$

помощью этих двух уравнений можно выразить ξ, η в зависимости от x, y или наоборот x, y в зависимости от ξ, η. Это дозволяет

переходить от уравнения кривой в координатах x, y к уравнению той же кривой в ξ, η или наоборот.

Дифференциал площади выражается в ξ, η уравнением (черт. 39)

$$d^2S = d\xi\, d\eta,$$

где S площадь.

Если мы рассматриваем S как функцию x, y, то имеем:

$$\left(\frac{dS}{dx}\right) = \frac{dS}{d\xi},$$

потом дифференцируя в отношении к y:

$$\frac{d^2S}{dx\,dy} = \frac{1}{\sin \Pi(y)} \frac{d^2S}{d\xi\, d\eta} = \frac{1}{\sin \Pi(y)} \quad [319]$$

согласно с тем, что было найдено выше.

Опускаем из точки $[M]$ в пространстве перпендикул z $[MN]$ на плоскость координат x, y (черт. 40).

Ведем чрез этот перпендикул плоскость, которая пересекает плоскость xy в прямой параллельной к оси x-ов [320]. Принимаем это пересечение $[NX']$ на стороне параллельности за ось предельного круга, который проходит чрез вершину $[M]$ перпендикула z, и пусть ζ длина дуги $[MP]$ этого предельного круга между вершиною z и осью. Имеем:

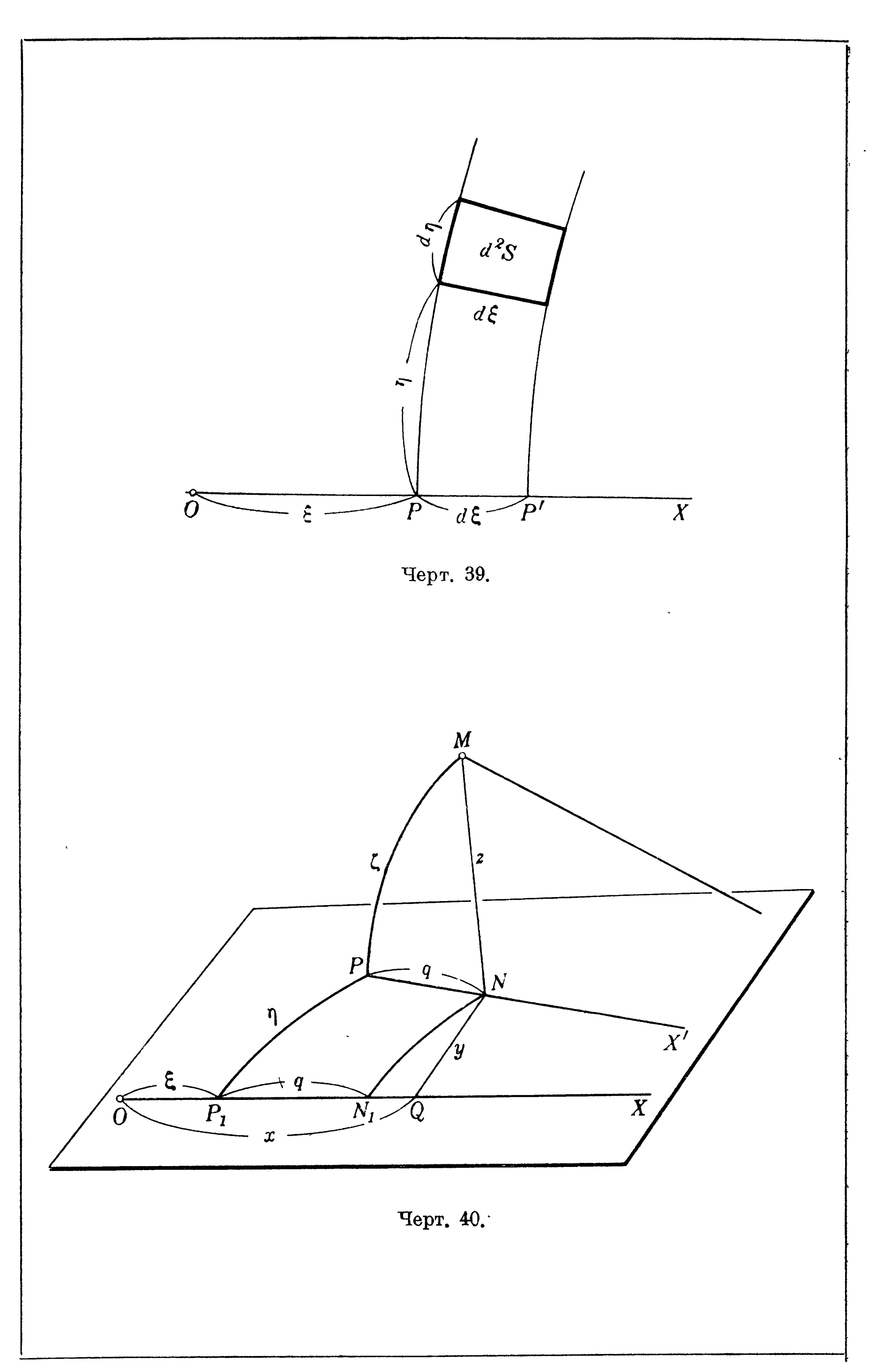
$$\zeta = \operatorname{cotg} \Pi(z).$$

Часть q параллельной к оси x-ов, проведенной чрез конец перпендикула z между вершиною ζ $[P]$ и концом $[N]$ перпендикула z будет дано уравнением [321]

$$e^{-q} = \sin \Pi(z).$$

Дуга $[NN_1]$ предельного круга, проведенная чрез конец z так, что ось положительных x-ов служит вместе осью предельному кругу, и которая заключается между концом z и этой осью, будет по величине равна $\operatorname{cotg} \Pi(y)$, а длина дуги η $[PP_1]$ предельного круга, проведенная чрез пересечение ζ с плоскостью x, y и для которой ось лежит на стороне x положительных, между этой точкой и осью, будет, как это было доказано, дана уравнением:

$$\eta = \frac{\operatorname{cotg} \Pi(y)}{\sin \Pi(z)} \quad [322].$$



Черт. 39.

Черт. 40.

Если мы к тому называем ξ часть оси x-ов между началом координат и дугой η, то уравнение предельного круга дает:

$$e^{-x+\xi+q} = \sin \Pi (y).$$

Из этих уравнений выводим, переменяя наперед только z и в зависимости от него ζ:

$$d\zeta = \frac{dz}{\sin \Pi (z)}.$$

Переменяя только y и η, получим:

$$d\eta = \frac{dy}{\sin \Pi (y) \sin \Pi (z)} \quad [328].$$

Наконец переменяя только ξ и x, получим:

$$d\xi = dx.$$

XI. ВЫРАЖЕНИЕ ПЛОЩАДИ ТРЕУГОЛЬНИКА ЧЕРЕЗ ЕГО СТОРОНЫ

21. Чтобы дополнить новую теорию под названием пангеометрии, которая основана на началах более общих, нежели начала обыкновенной геометрии, остается только дать выражение для дифференциала поверхностей и объемов помощию координат, определяющих положение точки в пространстве.

Рассматриваем с этой целью снова четыреугольник, в котором два бока a, y перпендикулярны к третьему x и в котором четвертый бок c перпендикулярен к y, делая с a угол φ [324]. Мы нашли (уравнение 25):

$$\cos \Pi(y) = \cos \Pi(a) \sin \Pi(x).$$

Потом находим помощью уравнений (10), (11), называя r диагонал между вершиною угла φ и вершиною прямого угла противоположного и A угол между x и r:

$$\cos \Pi(r) \cos A = \cos \Pi(x),$$
$$\cos A \operatorname{tang} \Pi(c) = \operatorname{tang} \Pi(r).$$

Из этих двух уравнений выводим:

$$\cos \Pi(x) \operatorname{tang} \Pi(c) = \sin \Pi(r);$$

но

$$\sin \Pi(r) = \sin \Pi(a) \sin \Pi(x),$$

следовательно:

$$\operatorname{tang} \Pi(c) = \sin \Pi(a) \operatorname{tang} \Pi(x).$$

Если c, x так малы, что можно пренебрегать их высшими степенями в сравнении с низшими и допустить следующие приближенные значения для $\operatorname{tang} \Pi(c)$, $\operatorname{tang} \Pi(x)$:

$$\operatorname{tang} \Pi(c) = \frac{1}{c}; \quad \operatorname{tang} \Pi(x) = \frac{1}{x},$$

то находим

$$c = \frac{x}{\sin \Pi(a)} \text{ [325]}. \qquad (27')$$

Прямая c, которая соединяет вершины a, y, не будет перпендикулярна к y если $a=y$ в четыреугольнике; в таком случае прямая p, из средины x проведенная к средине c, перпендикулярна к x и c. Итак в уравнении (27′) можем c заменить $\frac{c}{2}$, а x заменить $\frac{x}{2}$, от чего уравнение не изменяется [326]. Таким образом это уравнение доказывается даже для случая $a=y$, к которому выше данное доказательство непосредственно не применяется.

Величина кривой поверхности измеряется суммою площадей треугольников, которые смыкаются в одну сплошную сеть и вершины которых лежат на поверхности; эта мера будет тем точнее, чем измеряемые треугольники менее.

Граница, к которой эта сумма приближается до бесконечности, когда измеряемые треугольники уменьшаются до бесконечности и с которою она может разниться менее, нежели всякая данная величина, называется *математическая величина поверхности.*

Определяем наперед площадь прямолинейного прямоугольного треугольника помощию 3-х его боков a, b, c с противоположными углами $\Pi(\alpha)$, $\Pi(\beta)$, $\frac{\pi}{2}$. Мы видели, что в таком треугольнике можно заменить линии

$$a,\ b,\ c,\ \alpha,\ \beta$$

линиями:

$$a,\ \alpha',\ \beta,\ b',\ c$$

соответственно [327].

Кроме того мы нашли:

$$2\Pi(b)=\Pi(c+\beta)+\Pi(c-\beta)\ [328].$$

Вставляя α' вместо b, β вместо c, и c вместо β, получим [329]

$$\pi-2\Pi(\alpha)=\Pi(\beta+c)+\Pi(\beta-c)$$

или

$$2\Pi(\alpha)=\Pi(c-\beta)-\Pi(c+\beta).$$

Таким же образом находим:

$$2\Pi(\beta)=\Pi(c-\alpha)-\Pi(c+\alpha).$$

Переменяя в этом уравнении буквы, как это было сказано [330], получим:

$$2\Pi(c)=\Pi(\beta-b')-\Pi(\beta+b').$$

Таким же образом находим:

$$2\Pi(c)=\Pi(\alpha-a')-\Pi(\alpha+a'),$$

откуда с переменою букв, как было выше указано, выводим:

$$2\Pi(\beta) = \Pi(b' - a') - \Pi(b' + a').$$

Таким же образом получим:

$$2\Pi(\alpha) = \Pi(a' - b') - \Pi(a' + b').$$

Сложение двух последних уравнений дает:

$$2\Pi(\alpha) + 2\Pi(\beta) = \pi - 2\Pi(a' + b').$$

После чего площадь треугольника $\triangle$ дана выражением:

$$\triangle = \frac{\pi}{2} - \Pi(\alpha) - \Pi(\beta) = \Pi(a' + b')$$ [331]

и потом:

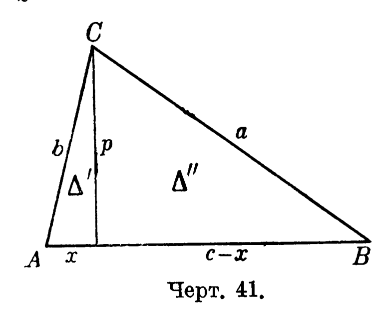
$$\operatorname{tang}\frac{1}{2}\triangle = e^{-a'}e^{-b'} = \operatorname{tang}\left\{\frac{1}{4}\pi - \frac{1}{2}\Pi(a)\right\}\cdot\operatorname{tang}\left\{\frac{1}{4}\pi - \frac{1}{2}\Pi(b)\right\}$$ [332];

откуда наконец выводим:

$$\operatorname{tang}\frac{1}{2}\triangle = \frac{e^a - 1}{e^a + 1}\cdot\frac{e^b - 1}{e^b + 1}.$$

Когда a, b весьма малы так, что можно пренебрегать высшими степенями от a, b, $\triangle$, то эта формула дает: $\triangle = \frac{1}{2}ab$, как в обыкновенной геометрии.

В прямолинейном треугольнике можем всегда выбрать один угол C так, чтобы из вершины его перпендикул к противоположному боку лежал внутри треугольника (черт. 41). Этот перпендикул разделит бок c треугольника на две части: одна x, прилежащая к углу A, другая $c - x$, прилежащая к углу B. Площадь S этого треугольника будет равна сумме площадей двух прямоугольных треугольников, произведенных этим перпендикулом h и будет дана уравнением:



Черт. 41.

$$\operatorname{tang}\frac{1}{2}S = \frac{\frac{e^x - 1}{e^x + 1}\cdot\frac{e^h - 1}{e^h + 1} + \frac{e^{c-x} - 1}{e^{c-x} + 1}\cdot\frac{e^h - 1}{e^h + 1}}{1 - \frac{e^x - 1}{e^x + 1}\cdot\frac{e^{c-x} - 1}{e^{c-x} + 1}\cdot\left\{\frac{e^h - 1}{e^h + 1}\right\}}$$ [333].

Уравнение, которому можно дать вид:

$$\operatorname{tang}\frac{1}{2}S = \frac{(e^{2h} - 1)(e^c - 1)}{(e^x + e^{c-x})(e^h + 1)^2 + 2e^h(e^x - 1)(e^{c-x} - 1)}.$$

Это выражение дает, если пренебрегаем высшими степенями S, h, c перед низшими:

$$S=\frac{1}{2}ch,$$

как в обыкновенной геометрии [334].

22. Мы видели, что площадь треугольника выражается помощью трех углов A, B, C треугольника следующим образом:

$$S=\pi-A-B-C.$$

Берем значение A в зависимости от a, b, c из второго уравнения (19); так получим:

$$\cos A=\frac{1-\dfrac{\sin\Pi(b)\sin\Pi(c)}{\sin\Pi(a)}}{\cos\Pi(b)\cos\Pi(c)};$$

откуда следует

$$2\cos^2\frac{1}{2}A=\frac{1+\cos\Pi(b)\cos\Pi(c)-\dfrac{\sin\Pi(b)\sin\Pi(c)}{\sin\Pi(a)}}{\cos\Pi(b)\cos\Pi(c)}.$$

Если вставим сюда:

$$\frac{\sin\Pi(b)\sin\Pi(c)}{\sin\Pi(b+c)}$$

вместо

$$1+\cos\Pi(b)\cos\Pi(c)\ [335],$$

то это выражение примет вид:

$$2\cos^2\frac{1}{2}A=\operatorname{tang}\Pi(b)\operatorname{tang}\Pi(c)\left\{\frac{1}{\sin\Pi(b+c)}-\frac{1}{\sin\Pi(a)}\right\}.$$

Таким же образом находим:

$$-2\sin^2\frac{1}{2}A=\operatorname{tang}\Pi(b)\operatorname{tang}\Pi(c)\left\{\frac{1}{\sin\Pi(b-c)}-\frac{1}{\sin\Pi(a)}\right\}.$$

Из этих двух выражений выводим [336]:

$$\sin^2 A=\operatorname{tang}^2\Pi(b)\operatorname{tang}^2\Pi(c)\times$$
$$\times\left\{-\frac{1-\cos^2\Pi(b)\cos^2\Pi(c)}{\sin^2\Pi(b)\sin^2\Pi(c)}+\frac{2}{\sin\Pi(a)\sin\Pi(b)\sin\Pi(c)}-\frac{1}{\sin^2\Pi(a)}\right\}$$

или

$$\sin^2 A=-\operatorname{tang}^2\Pi(b)\operatorname{tang}^2\Pi(c)\times$$
$$\times\left\{\frac{1}{\sin^2\Pi(a)}+\frac{1}{\sin^2\Pi(b)}+\frac{1}{\sin^2\Pi(c)}-\frac{2}{\sin\Pi(a)\sin\Pi(b)\sin\Pi(c)}-1\right\}.$$

Полагая для сокращения

$$P=\sqrt{\frac{-1}{\sin^2\Pi(a)}-\frac{1}{\sin^2\Pi(b)}-\frac{1}{\sin^2\Pi(c)}+\frac{2}{\sin\Pi(a)\sin\Pi(b)\sin\Pi(c)}+1},$$

получим:

$$\sin A=\operatorname{tang}\Pi(b)\operatorname{tang}\Pi(c)P. \qquad (28)$$

Можно также дать P следующий вид, симметричный в отношении к a, b, c:

$$P^2 = 2\left\{1+\frac{1}{\sin \Pi(a)}\right\}\left\{1+\frac{1}{\sin \Pi(b)}\right\}\left\{1+\frac{1}{\sin \Pi(c)}\right\} - \\ - \left\{1+\frac{1}{\sin \Pi(a)}+\frac{1}{\sin \Pi(b)}+\frac{1}{\sin \Pi(c)}\right\}^2.$$

Идя от уравнения (28) и рассматривая здесь P как величину неопределенную, можно доказать следующим образом, что P должно быть симметричная функция от a, b, c. Умножая уравнение (28) на $\operatorname{tang}\Pi(a)$, поставляем сюда $\sin B \operatorname{tang}\Pi(b)$ вместо его значения $\sin A \operatorname{tang}\Pi(a)$ (уравнение 13) и разделим потом на $\operatorname{tang}\Pi(b)$, выходит:

$$\sin B = \operatorname{tang}\Pi(a)\operatorname{tang}\Pi(c) P.$$

Умножаем это последнее уравнение на $\operatorname{tang}\Pi(b)$ и вставим сюда $\sin C \operatorname{tang}\Pi(c)$ вместо его значения $\sin B \operatorname{tang}\Pi(b)$ (уравнение 13) и разделим потом на $\operatorname{tang}\Pi(c)$; получим:

$$\sin C = \operatorname{tang}\Pi(a)\operatorname{tang}\Pi(b) P,$$

откуда видно [337], что функция P симметрична в отношении к a, b, c.

Мы уже нашли:

$$\cos A = \frac{1-\dfrac{\sin \Pi(b)\sin \Pi(c)}{\sin \Pi(a)}}{\cos \Pi(b)\cos \Pi(c)}$$

или, все равно:

$$\cos A = \operatorname{tang}\Pi(b)\operatorname{tang}\Pi(c)\left\{\frac{1}{\sin \Pi(b)\sin \Pi(c)}-\frac{1}{\sin \Pi(a)}\right\};$$

таким же образом находим:

$$\cos B = \operatorname{tang}\Pi(c)\operatorname{tang}\Pi(a)\left\{\frac{1}{\sin \Pi(a)\sin \Pi(c)}-\frac{1}{\sin \Pi(b)}\right\};$$

$$\cos C = \operatorname{tang}\Pi(a)\operatorname{tang}\Pi(b)\left\{\frac{1}{\sin \Pi(a)\sin \Pi(b)}-\frac{1}{\sin \Pi(c)}\right\}.$$

Из этих выражений для $\sin A$, $\cos A$, $\sin B$, $\cos B$, выводим:

$$\sin(A+B) = \sin A\cos B + \cos A \sin B =$$

$$= \operatorname{tang}\Pi(b)\operatorname{tang}^2\Pi(c)\operatorname{tang}\Pi(a) P\left\{\frac{1}{\sin \Pi(c)\sin \Pi(a)}-\frac{1}{\sin \Pi(b)}\right\} + \\ + \operatorname{tang}^2\Pi(c)\operatorname{tang}\Pi(a)\operatorname{tang}\Pi(b) P\left\{\frac{1}{\sin \Pi(b)\sin \Pi(c)}-\frac{1}{\sin \Pi(a)}\right\} = \\ = \operatorname{tang}\Pi(a)\operatorname{tang}\Pi(b)\operatorname{tang}^2\Pi(c) P\left\{\frac{1}{\sin \Pi(a)}+\frac{1}{\sin \Pi(b)}\right\}\left\{\frac{1}{\sin \Pi(c)}-1\right\}$$

и наконец [338]

$$\sin(A+B)=\frac{\operatorname{tang}\Pi(a)\operatorname{tang}\Pi(b)P}{\left\{\frac{1}{\sin\Pi(c)}+1\right\}}\left\{\frac{1}{\sin\Pi(a)}+\frac{1}{\sin\Pi(b)}\right\}.$$

Последнее из уравнений (19) дает:

$$\cos A+\cos(B+C)=\sin B\sin C\left\{\frac{1}{\sin\Pi(a)}-1\right\};$$

вставляем сюда вместо $\sin B$, $\sin C$ их значения из уравнения (28), получим:

$$\cos(B+C)=-\cos A+\operatorname{tang}\Pi(c)\operatorname{tang}^2\Pi(a)\operatorname{tang}\Pi(b)P^2\left\{\frac{1}{\sin\Pi(a)}-1\right\}$$

или, что все равно

$$\cos(B+C)=-\cos A+\frac{\operatorname{tang}\Pi(b)\operatorname{tang}\Pi(c)P^2}{\frac{1}{\sin\Pi(a)}+1}.$$

Помощью предъидущих уравнений находим:

$$\cos(A+B+C)=\cos A\cos(B+C)-\sin A\sin(B+C)=$$

$$=-\cos^2 A+\frac{\operatorname{tang}^2\Pi(b)\operatorname{tang}^2\Pi(c)P^2}{\left\{\frac{1}{\sin\Pi(a)}+1\right\}}\left\{\frac{1}{\sin\Pi(b)\sin\Pi(c)}-\frac{1}{\sin\Pi(a)}\right\}-$$

$$-\frac{\operatorname{tang}^2\Pi(b)\operatorname{tang}^2\Pi(c)P^2}{\left\{\frac{1}{\sin\Pi(a)}+1\right\}}\left\{\frac{1}{\sin\Pi(b)}+\frac{1}{\sin\Pi(c)}\right\},$$

$$2\cos^2\frac{(A+B+C)}{2}=$$

$$=\sin^2 A+\frac{\operatorname{tang}^2\Pi(b)\operatorname{tang}^2\Pi(c)P^2}{\left\{\frac{1}{\sin\Pi(a)}+1\right\}}\left\{\frac{1}{\sin\Pi(b)\sin\Pi(c)}-\frac{1}{\sin\Pi(a)}\right\}-$$

$$-\frac{\operatorname{tang}^2\Pi(b)\operatorname{tang}^2\Pi(c)}{\left\{\frac{1}{\sin\Pi(a)}+1\right\}}\left\{\frac{1}{\sin\Pi(b)}+\frac{1}{\sin\Pi(c)}\right\}=$$

$$=\operatorname{tang}^2\Pi(b)\operatorname{tang}^2\Pi(c)P^2+\frac{\operatorname{tang}^2\Pi(b)\operatorname{tang}^2\Pi(c)}{\left\{\frac{1}{\sin\Pi(a)}+1\right\}}\times$$

$$\times\left\{\frac{1}{\sin\Pi(b)\sin\Pi(c)}-\frac{1}{\sin\Pi(a)}-\frac{1}{\sin\Pi(b)}-\frac{1}{\sin\Pi(c)}\right\}=$$

$$=\frac{\operatorname{tang}^2\Pi(b)\operatorname{tang}^2\Pi(c)P^2}{\left\{\frac{1}{\sin\Pi(a)}+1\right\}}\left\{1+\frac{1}{\sin\Pi(b)\sin\Pi(c)}-\frac{1}{\sin\Pi(b)}-\frac{1}{\sin\Pi(c)}\right\}=$$

$$=\operatorname{tang}^2\Pi(a)\operatorname{tang}^2\Pi(b)\operatorname{tang}^2\Pi(c)P^2\times$$

$$\times\left\{\frac{1}{\sin\Pi(a)}-1\right\}\left\{\frac{1}{\sin\Pi(b)}-1\right\}\left\{\frac{1}{\sin\Pi(c)}-1\right\};$$

но было уже доказано, что площадь треугольника

$$\triangle = \pi - A - B - C,$$

следовательно

$$\sin\frac{\triangle}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{tang} \Pi(a) \operatorname{tang} \Pi(b) \operatorname{tang} \Pi(c) P \times$$
$$\times \sqrt{\left(\frac{1}{\sin \Pi(a)} - 1\right)\left(\frac{1}{\sin \Pi(b)} - 1\right)\left(\frac{1}{\sin \Pi(c)} - 1\right)}; \quad [A]$$

если a, b, c так малы, что можем довольствоваться приближением

$$\frac{1}{\sin \Pi(a)} = 1 + \frac{1}{2} a^2, \quad \frac{1}{\sin \Pi(b)} = 1 + \frac{1}{2} b^2, \quad \frac{1}{\sin \Pi(c)} = 1 + \frac{1}{2} c^2,$$
$$\operatorname{tang} \Pi(a) = \frac{1}{a}\left(1 - \frac{1}{6} a^2\right), \quad \operatorname{tang} \Pi(b) = \frac{1}{b}\left(1 - \frac{1}{6} b^2\right),$$
$$\operatorname{tang} \Pi(c) = \frac{1}{c}\left(1 - \frac{1}{6} c^2\right),$$

то получим:

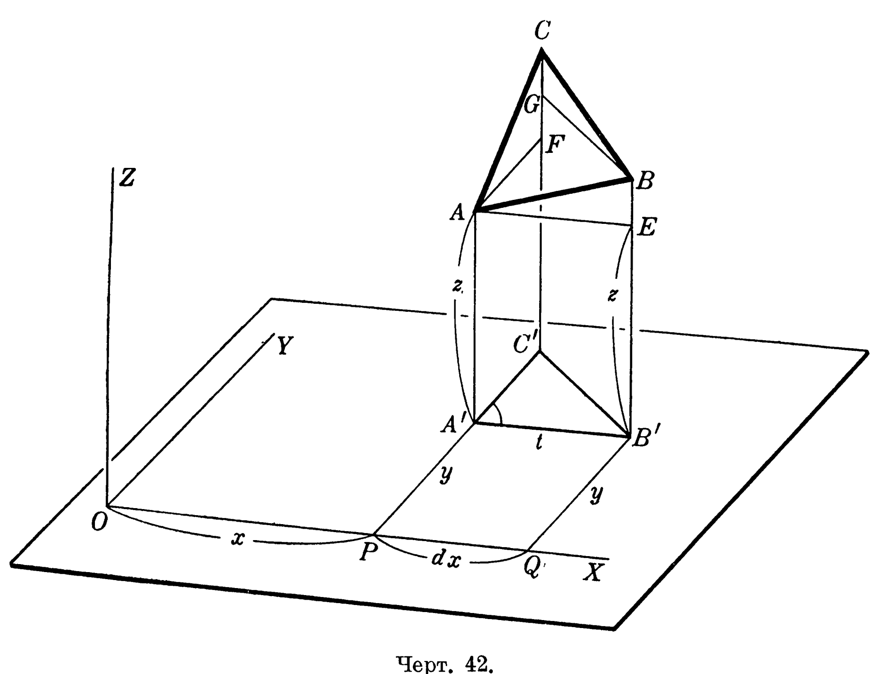
$$\sin\frac{\triangle}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 b^2 - \left(\frac{c^2 - a^2 - b^2}{2}\right)^2} \quad [B]$$

или, отбрасывая степени $\triangle$ выше первой:

$$\triangle = \sqrt{a^2 b^2 - \left(\frac{c^2 - a^2 - b^2}{2}\right)^2} \ [339]. \quad [C]$$

XII. ВЫЧИСЛЕНИЕ ПЛОЩАДИ КРИВОЙ ПОВЕРХНОСТИ

23. Определяем положение точки в пространстве тремя прямоугольными координатами (черт. 42), z перпендикулярно к плоскости xy, y перпендикул, опущенный от конца z к оси x, а x часть оси x между началом координат и концом y [340].



Черт. 42.

На кривой поверхности, элемент которой требуется определить, берем три точки [A, B, C] [341] и пусть координаты первой [A] x, y, z, координаты второй [B] $x+dx$, y, $z+\left(\frac{dz}{dx}\right)dx$, а координаты третьей точки [C] x, $y+dy$, $z+\left(\frac{dz}{dy}\right)dy$. Называем t расстояние между вершинами двух перпендикулов к оси x-ов, которые обе равны y, и между которыми заключается часть dx оси x;

предполагая dx, dy бесконечно малыми, получим, основываясь на уравнении (27′),

$$t = \frac{dx}{\sin \Pi(y)}.$$

Расстояние двух первых точек на кривой поверхности составляет треугольник с прямыми [AE] и [EB], которых длина

$$\frac{dx}{\sin \Pi(y) \sin \Pi(z)}, \quad \left(\frac{dz}{dx}\right) dx \text{ [342]}.$$

Можем почитать этот треугольник за прямоугольный при малости его боков, где гипотенуза будет расстояние между двумя первыми точками [AB] на поверхности. Итак квадрат этого расстояния будет

$$dx^2 \left\{\frac{1}{\sin^2 \Pi(y) \sin^2 \Pi(z)} + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2\right\}. \qquad [c^2]$$

Таким же образом находим квадрат расстояния первой точки от третьей [AC] [343]

$$dy^2 \left\{\frac{1}{\sin^2 \Pi(z)} + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2\right\}; \qquad [b^2]$$

и квадрат расстояния второй точки от третьей [BC]

$$\frac{dx^2}{\sin^2 \Pi(y) \sin^2 \Pi(z)} + \frac{dy^2}{\sin^2 \Pi(z)} + \left\{\left(\frac{dz}{dy}\right) dy - \left(\frac{dz}{dx}\right) dx\right\}^2 \text{ [344]}. \qquad [a^2]$$

Площадь треугольника, которому боками служат расстояния от первой точки на кривой поверхности до второй, от второй до третьей и от третьей до первой, где и сумма углов равняется π без чувствительной погрешности по причине малости боков, будет равна, вследствие доказанного выше и значений, найденных для квадратов его сторон

$$\frac{d^2S}{dx\,dy} = \frac{1}{2 \sin \Pi(z)} \sqrt{\left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + \frac{1}{\sin^2 \Pi(y)} \left(\frac{dz}{dy}\right)^2 + \frac{1}{\sin^2 \Pi(y) \sin^2 \Pi(z)}}; \qquad (29)$$

таково выражение для элемента поверхности, уравнение которой

$$z = f(x, y).$$

Применяем это выражение к *сфере*, которой полупоперечник r; если начало координат в центре сферы, то уравнение сферы дает [345]

$$\left(\frac{dz}{dx}\right) = -\frac{\cos \Pi(x)}{\cos \Pi(z)}, \quad \left(\frac{dz}{dy}\right) = -\frac{\cos \Pi(y)}{\cos \Pi(z)},$$

потом

$$\frac{\cos \Pi(r)}{\sin^2 \Pi(r)} \cdot \frac{\sin \Pi(y) \sin^2 \Pi(x)}{\sqrt{\sin^2 \Pi(x) \sin^2 \Pi(y) - \sin^2 \Pi(r)}} = \frac{d^2S}{d\,\Pi(x)\, d\,\Pi(y)} \text{ [346]}.$$

Умножаем на $d\Pi(y)$ и интегрируем от $\sin\Pi(y)=\frac{\sin\Pi(r)}{\sin\Pi(x)}$, до $\Pi(y)=\frac{\pi}{2}$ [347], получим:

$$\frac{dS}{d\Pi(x)}=\frac{2\pi\sin\Pi(x)\cos\Pi(r)}{\sin^2\Pi(r)}.$$

Умножаем еще на $d\Pi(x)$ и интегрируем от $\Pi(x)=\frac{\pi}{2}$, получим:

$$S=\frac{2\pi\cos\Pi(r)\cos\Pi(x)}{\sin^2\Pi(r)}.$$

Это представляет поверхность отрезка сферы, заключенного между двух плоскостей перпендикулярных к одному полупоперечнику, из которых одна проходит чрез центр сферы, а другая на расстояние x от центра сферы. Чтобы найти поверхность всей сферы, надо в это последнее выражение поставить $x=r$ и значение всего выражения удвоить; таким образом находим величину поверхности всей сферы $4\pi\operatorname{cotg}^2\Pi(r)$ или $\pi(e^r-e^{-r})^2$; если r так мало, что можно пренебречь высшие степени от r, то это выражение делается $4\pi r^2$, как в обыкновенной геометрии.

24 [348]. Полагаем

$$\cos\psi=\operatorname{tang}\Pi(r)\operatorname{cotg}\Pi(y),$$
$$\cos\Pi(x)=\cos\Pi(r)\sin\psi\sin\varphi$$

и вводим новые переменные ψ, φ вместо x, y в выражение для элемента поверхности шара с полупоперечником r, о котором идет дело; находим:

$$\frac{d^2S}{d\varphi\,d\psi}=\frac{\cos^2\Pi(r)}{\sin\Pi(r)}\cdot\frac{\sin\psi\sqrt{1-\cos^2\Pi(r)\sin^2\psi\sin^2\varphi}}{1-\cos^2\Pi(r)\sin^2\psi}. \qquad [29a]$$

Умножаем это уравнение на $8\,d\psi\,d\varphi$ и интегрируем от $\psi=0$ до $\psi=\frac{\pi}{2}$ и от $\varphi=0$ до $\varphi=\frac{\pi}{2}$, так находим поверхность целой сферы. Уравнивая выражение, которое найдем таким образом для поверхности целой сферы с выражением, найденным выше для той же поверхности, заключаем, что

$$\frac{\pi}{2\sin\Pi(r)}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\psi\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\frac{\sin\psi\sqrt{1-\cos^2\Pi(r)\sin^2\psi\sin^2\varphi}}{1-\cos^2\Pi(r)\sin^2\psi}. \qquad (30)$$

Если означаем $E(\alpha)$ эллиптический интеграл

$$E(\alpha)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\sqrt{1-\alpha^2\sin^2\varphi}\ \text{[349]},$$

где α постоянное под знаком интеграла, то находим помощию интеграла, которого значение представляет сферу:

$$\frac{\pi\alpha}{2\sqrt{1-\alpha^2}}=\int_0^\alpha \frac{x\,dx\,E(x)}{(1-x^2)\sqrt{\alpha^2-x^2}};$$

ставя в интеграл (30) $\frac{\pi}{2}-R$ вместо $\Pi(r)$, получим:

$$\frac{\pi}{2}R=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\psi\,d\varphi\sin\psi\sin R}{\sqrt{1-\sin^2\psi\sin^2\varphi\sin^2 R}}.$$

Произведя интегрирование в отношении ψ в указанных границах, находим:

$$\pi R=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\varphi}{\sin\varphi}\log\left(\frac{1+\sin\varphi\sin R}{1-\sin\varphi\sin R}\right),$$

что принимает вид, когда поставим $\Pi(x)$ вместо φ

$$\pi R=\int_0^\infty dx\log\left\{\frac{e^{2x}+1+2e^x\sin R}{e^{2x}+1-2e^x\sin R}\right\};$$

интегрирование по частям приводит этот интеграл к такому:

$$\frac{1}{4}\pi\frac{R}{\sin R}=\int_0^\infty\frac{(e^{2x}-1)e^x\,x\,dx}{e^{4x}+2e^{2x}\cos 2R+1}; \qquad (31)$$

для $R=\frac{\pi}{2}$ это уравнение дает:

$$\frac{1}{8}\pi^2=\int_0^\infty\frac{x\,dx\,e^x}{e^{2x}-1}.$$

Легко доказать справедливость уравнения (31) для $\cos 2R>1$ [350]. Мы в самом деле имеем:

$$\int_0^\pi d\psi\log\operatorname{cotg}\frac{1}{2}\psi=0,$$

откуда следует, что для всякого числа a

$$\int_0^\pi d\psi\log\left(e^a\operatorname{cotg}\frac{1}{2}\psi\right)=a\pi.$$

Переменяем это уравнение, полагая в нем $e^a \operatorname{cotg} \frac{1}{2} \psi = e^x$; получим:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\,dx}{e^{x-a} + e^{-x+a}} = \frac{1}{2}\pi a;$$

этому уравнению легко можно дать еще такой вид [351]:

$$\int_{0}^{\infty} \frac{(e^x - e^{-x})\,x\,dx}{e^{2x} + (e^{2a} + e^{-2a}) + e^{-2x}} = \frac{1}{2}\,\frac{\pi a}{e^a - e^{-a}},$$

откуда приходим снова к уравнению (31), ставя $a\sqrt{-1}$ вместо a.

XIII. ВЫЧИСЛЕНИЕ ОБЪЕМОВ ТЕЛ

25. Если за координаты принимаем дуги предельного круга, одна ζ проведенная от данной точки в плоскости пересекающей плоскость xy в прямой параллельной к оси x и которой дуге ζ эта параллельная, продолженная на стороне параллельности, служит осью, другая η в плоскости x, y проведенная от конца ζ до оси x-ов, которая вместе служит осью этой дуге, если наконец за третью координату принимаем ξ, отрезок оси x от начала координат до конца η, то элемент объема P должен быть $d\xi\, d\eta\, d\zeta$ [352]. Итак

$$d^3P = d\xi\, d\eta\, d\zeta.$$

Полагаем еще $\zeta = \operatorname{cotg} \Pi(z)$ [353], где z перпендикул от данной точки на плоскость xy; получим:

$$\left(\frac{d^3P}{d\xi\, d\eta\, dz}\right) = \frac{1}{\sin \Pi(z)}.$$

Из уравнения предельного круга выводим

$$e^{-p} = \sin \Pi(z) \quad [354],$$

где p расстояние от пересечения дуги ζ с плоскостью xy до конца перпендикула z.

Замечая к тому, что вследствие уравнения предельного круга и выражения дуги предельного круга в зависимости от ординаты:

$$\operatorname{cotg} \Pi(y) = \eta\, e^{-p},$$

$$e^{\xi - x} = \sin \Pi(z) \sin \Pi(y) \quad [355],$$

находим:

$$\frac{d\eta}{dy} = \frac{1}{\sin \Pi(y) \sin \Pi(z)}; \quad dx = d\xi;$$

откуда следует, что

$$\left(\frac{d^3P}{dx\, dy\, dz}\right) = \frac{1}{\sin \Pi(y) \sin^2 \Pi(z)}. \qquad [31a]$$

Умножая это выражение на dx и интегрируя от $x=0$, получим:

$$\left(\frac{d^2P}{dy\,dz}\right)=\frac{x}{\sin \Pi(y)\sin^2 \Pi(z)}.$$

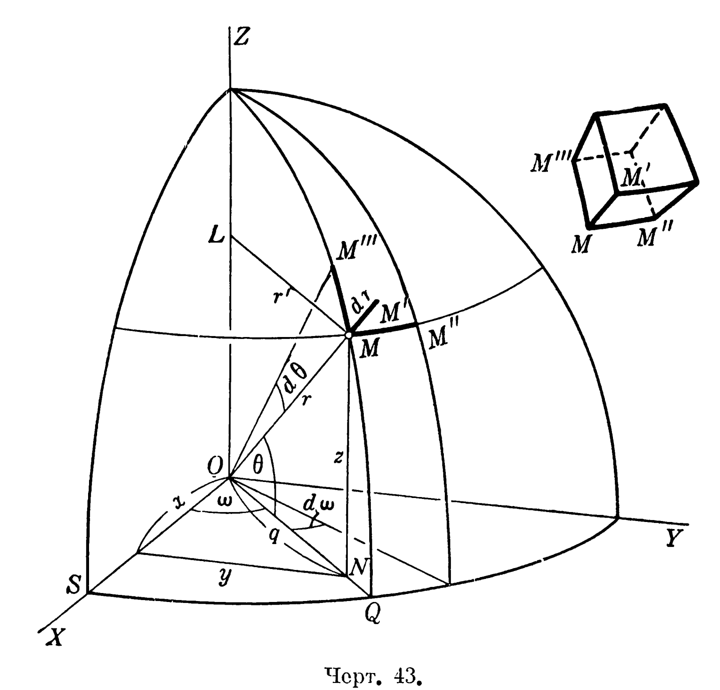
Умножая то же выражение на dy и интегрируя от $y=0$, получим:

$$\left(\frac{d^2P}{dx\,dz}\right)=\frac{\operatorname{cotg} \Pi(y)}{\sin^2 \Pi(z)}.$$

Умножая наконец на dz и интегрируя от $z=0$, получим:

$$\left(\frac{d^2P}{dx\,dy}\right)=\frac{1}{8\sin \Pi(y)}\left\{e^{2z}-e^{-2z}+4z\right\} \text{ [356]}.$$

Если предпоследнее из этих выражений умножаем на $dx\,dz$ и потом интегрируем сначала в отношении к z от $z=0$ до значения z, взятого из уравнения $\sin \Pi(r)=\sin \Pi(x)\sin \Pi(z)$, а потом в отношении к x от $x=0$ до $x=r$, и если умножаем вывод на 8, чтобы получить объем целого шара, то находим объем целого шара $=\frac{1}{2}\pi\left\{e^{2r}-e^{-2r}-4r\right\}$ [357], что для r очень малого дает $\frac{4}{3}\pi r^3$, как в обыкновенной геометрии [358].



Черт. 43.

26. Чтобы элемент объема выразить в полярных координатах, называем r расстояние от начала координат до точки [M] в пространстве, прямоугольные координаты которой x, y, z (черт. 43)

Называем q прямую $[ON]$, проведенную от начала координат до конца z, θ угол между r и q, ω угол между q и осью положительных x-ов. Полагаем еще $\Pi(x) = X$, $\Pi(y) = Y$, $\Pi(z) = Z$, $\Pi(r) = R$, $\Pi(q) = Q$. Ведем чрез данную точку плоскость перпендикулярно к оси z. Пусть r' прямая $[ML]$, проведенная в этой плоскости от данной точки к оси z и полагаем еще $\Pi(r') = R'$.

Описываем около начала координат как центра сферу полупоперечником r. Плоскость xy пересекает эту сферу в большом круге, окружность которого, согласно доказанному выше, будет:

$$2\pi \operatorname{cotg} R.$$

Часть этого круга $[QS]$ [359] между двух плоскостей, проведенных через ось z-ов и наклоненных одна к другой под углом ω, должна быть

$$\omega \operatorname{cotg} R.$$

Окружность круга от пересечения той же сферы с плоскостью, проходящею чрез данную точку и перпендикулярной к оси z, будет:

$$2\pi \operatorname{cotg} R'.$$

А часть этой окружности между двух плоскостей, проведенных чрез ось z и наклоненных под углом ω, должна быть:

$$\omega \operatorname{cotg} R'.$$

Изменение $[MM'']$, произведенное в этой последней дуге приращением угла ω на $d\omega$, должно быть

$$d\omega \operatorname{cotg} R'.$$

Прямоугольный треугольник $[MOL]$, где гипотенуза r, один из боков прямого угла r' и угол против r' равен $\frac{\pi}{2} - \theta$, дает (уравнение 12) $\operatorname{tang} R' \cos\theta = \operatorname{tang} R$, откуда следует, что

$$d\omega \operatorname{cotg} R' = d\omega \operatorname{cotg} R \cos\theta.$$

Окружность круга от пересечения той же сферы плоскостью, проходящею чрез ось z, равна

$$2\pi \operatorname{cotg} R,$$

а дуга этого круга, которая соответствует углу θ при центре, будет:

$$\theta \operatorname{cotg} R;$$

откуда следует, что изменение этой дуги $[MM'']$, которое соответствует приращению $d\theta$ к углу θ, должно быть:

$$d\theta \operatorname{cotg} R.$$

Если все приращения бесконечно малы, то элемент объема выражается, как в обыкновенной геометрии, произведением трех линий, перпендикулярных между собою

$$dr,\ d\omega \cos\theta \operatorname{cotg} R,\ d\theta \operatorname{cotg} R,$$

потому что объем этот может быть принимаем за призму [360]. Итак, элемент объема выражается в полярных координатах:

$$dr\, d\omega\, d\theta \cos\theta \operatorname{cotg}^2 R = d^3P$$

или заменяя $\operatorname{cotg}^2 R$ его значением в r:

$$d^3P = \frac{1}{4}\, dr\, d\omega\, d\theta \cos\theta\, (e^r - e^{-r})^2 \ [361].$$

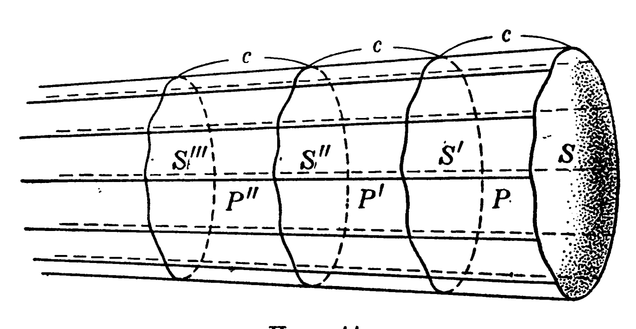
Интегрируя сначала в отношении к r от $r = 0$, получим:

$$d^2P = \frac{1}{8}\, d\omega\, d\theta\, (e^{2r} - e^{-2r} - 4r).$$

Для сферы, которой центр в начале координат, r не зависит от θ и ω.

Интегрируя в отношении к ω от $\omega = 0$ до $\omega = 2\pi$ и в отношении к θ от $\theta = 0$ до $\theta = \frac{\pi}{2}$ и умножая вывод на 2, получим объем целой сферы: $\frac{1}{2}\pi(e^{2r} - e^{-2r} - 4r)$, как выше.

27. Рассматриваем теперь (черт. 44) часть S поверхности предельной сферы, ограниченной замкнутой линией, ведем из раз-



Черт. 44.

личных точек этой пограничной линии прямые, параллельные к оси сферы; такие прямые образуют поверхность, которую мы

назовем по сходству коническою и которая простирается бесконечно в обе стороны, но на которой мы будем рассматривать только часть от предельной сферы, бесконечно простирающуюся в сторону параллельности осей предельной сферы. Пусть S' будет часть другой предельной сферы с осями, параллельными к прежним и обращенными в ту же сторону; часть, которая находится внутри конической поверхности. S, S' и часть конической поверхности между обеими предельными сферами заключают объем, конечный во все стороны, который мы предлагаем определить. Называем c часть оси между двух предельных сфер. Повторяем прямую c несколько раз на одной из осей предельных сфер, проходящих чрез одну из точек кривой, ограничивающей S, начиная с той точки, где эта ось пересекает S'. Ведем чрез точки деления предельные сферы с осями, параллельными к осям двух первых и обращенными в ту же сторону. Пусть S'', S''' и т. д. — части этих предельных сфер внутри конической поверхности. Из того, что было доказано о дугах предельного круга, расположенных подобно, как и здесь о части предельной сферы, следует, что

$$S' = Se^{-2c}, \quad S'' = Se^{-4c}, \quad S''' = Se^{-6c} \text{ и т. д. [362]}.$$

Называем еще P, P', P'' и т. д. объемы внутри конической поверхности между S, S', между S' и S'' и т. д. и заметим к тому, что объемы P, P' P'' и т. д. должны быть пропорциональны поверхностям S, S' S'' и т. д. Итак должно быть $P = CS$, где C зависит только от c, откуда следует, что:

$$P' = CS' = CSe^{-2c}, \quad P'' = CS'' = CSe^{-4c}.$$

Сумма $\sum\limits_{n=0}^{\infty} P^{(n)}$ поэтому будет объем внутри конической поверхности, которой основание S и которая простирается беспредельно в сторону параллельности прямых производящих. Пусть этот объем будет K; получим:

$$K = \frac{CS}{1 - e^{-2c}}.$$

Эта величина не должна зависеть от c, а это требует, чтобы:

$$C = (1 - e^{-2c}) A,$$

где A число отвлеченное, а так как единица объема произвольна,

то мы примем $C = \frac{1}{2}(1 - e^{-2c})$ с тем, чтобы объем P, будучи выражен формулой

$$P = \frac{1}{2} S (1 - e^{-2c}),$$

обращался в $P = cS$ для бесконечно малого c, выражение, которое согласно с тем, как выражается в обыкновенной геометрии объем призмы с основанием S и с высотою c.

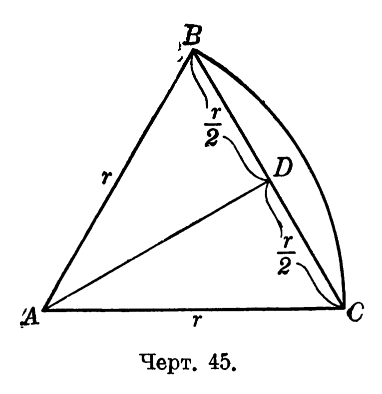
Можно также за элемент объема принимать ограниченный данною поверхностью объем внутри конической поверхности, образуемой осями предельной сферы, проведенными чрез все точки кривой, ограничивающей часть данной поверхности бесконечно малой во все стороны. Большое число различных выражений для элемента той же геометрической величины доставляет средства для сравнения интегралов, средства, которые в особенности полезны в теории определенных интегралов.

XIV. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

28. Показав до сих пор, каким образом надобно вычислять длину кривых линий, величину поверхностей и величину объема тел, мы вправе утверждать, что пангеометрия составляет учение геометрическое полное. Одного взгляда на уравнения, которыми выражают зависимость углов и боков прямолинейных треугольников, достаточно, чтобы доказать, что начиная с этих уравнений пангеометрия делается вычислением аналитическим, которое заменяет и обобщает аналитический способ обыкновенной геометрии. Можно бы начать изложение пангеометрии уравнениями (19) и даже попытаться заменить эти уравнения другими, которые бы выражали зависимость боков и углов всякого прямолинейного треугольника. Но в этом последнем случае надо было бы доказывать, что эти новые уравнения согласуются с основными геометрическими понятиями. Уравнения (19) будучи выведены с помощию этих основных геометрических понятий, необходимо с ними согласуются. Итак, все уравнения, какими можно бы было заменить уравнения (19), должны, если они не будут следствием уравнения (19), привести к заключениям противным основным геометрическим понятиям. Итак, уравнения (19) служат основанием геометрии в самом общем виде, потому что они не зависят от предположения, что сумма трех углов во всяком прямолинейном треугольнике равна двум прямым.

Пангеометрия, как она здесь изложена, основанная на началах несомненных, подает, как мы видели, средства к вычислению значения различных геометрических величин и доказывает вместе, что принятое в обыкновенной геометрии явно или скрытно предположение, что сумма трех углов всякого прямолинейного треугольника постоянна, не есть необходимое следствие наших поня-

тий о пространстве. Один опыт только может подтвердить истину этого предположения, например, измерением на самом деле трех углов прямолинейного треугольника, измерение, которое может быть произведено различным образом. Можно измерять три угла в треугольнике, построенном на искусственной плоскости, или три угла одного треугольника в пространстве. В этом последнем случае надобно предпочесть треугольники, которых бока очень велики, потому что согласно с теорией пангеометрии, разность суммы трех углов треугольника с двумя прямыми углами тем более, чем бока более.



Черт. 45.

Пусть (черт. 45) r полупоперечник круга, A угол при центре между полупоперечниками против хорды, равной r [363]. Называем p перпендикул, опущенный из центра круга к хорде r, которую он разделяет пополам. Рассматриваем один из прямоугольных треугольников, которого перпендикулярные бока p и $\frac{r}{2}$, а гипотенуза r.

Согласно с общим уравнением (13), в этом треугольнике будет:

$$\sin\frac{A}{2}\ \operatorname{tang}\Pi\left(\frac{r}{2}\right)=\operatorname{tang}\Pi(r),$$

уравнение, которое в соединении с тожественным уравнением

$$\operatorname{tang}\Pi(r)=\frac{\sin^2\Pi\left(\frac{r}{2}\right)}{2\cos\Pi\left(\frac{r}{2}\right)}\ [364]$$

дает:

$$\sin\frac{A}{2}=\frac{1}{2}\sin\Pi\left(\frac{r}{2}\right).$$

В обыкновенной геометрии имеем:

$$A=\frac{\pi}{3}.$$

Пусть действительное измерение дает:

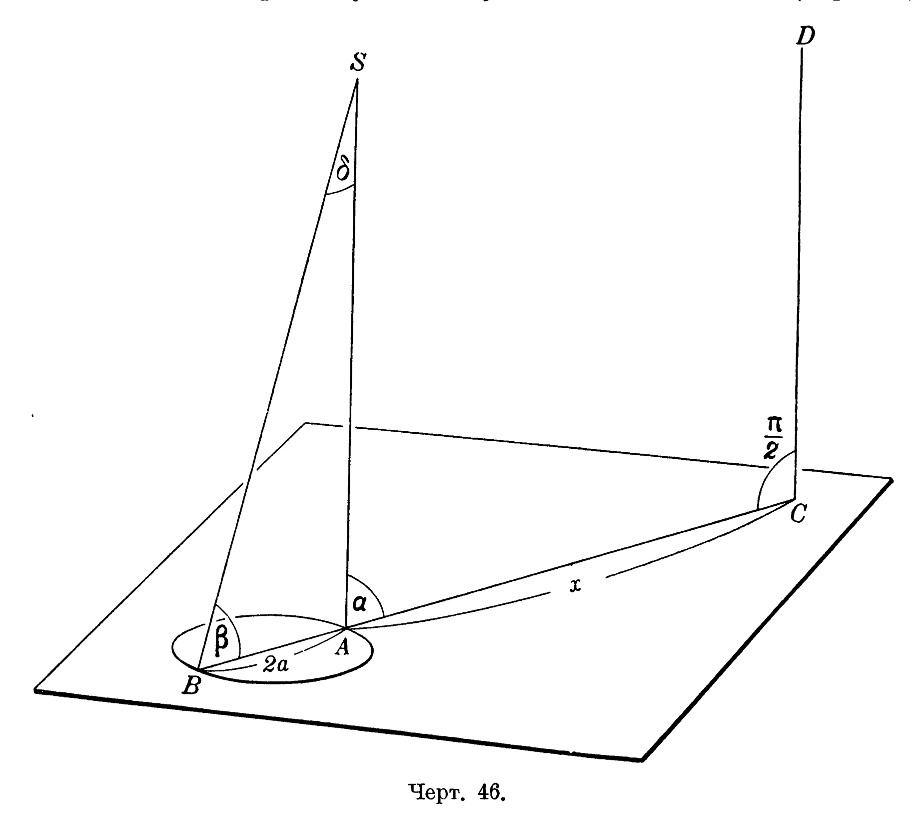
$$A=\frac{2\pi}{6+K},$$

где K положительное число. Итак должно быть

$$\sin\left(\frac{\pi}{6+K}\right)=\frac{1}{2}\sin\Pi\left(\frac{r}{2}\right).$$

Если K и r даны, то возможно вывести из этого уравнения значение $\Pi\left(\frac{r}{2}\right)$; после чего находим угол параллельности $\Pi(x)$ для всякой прямой x.

Расстояние между небесными телами доставляет нам случай наблюдать углы треугольников, которых бока очень велики [265]. Называем α геоцентрическую широту неподвижной звезды (черт. 46)



Черт. 46.

в данную эпоху, а β другую геоцентрическую широту той же звезды, которая отвечает времени, когда земля снова находится в плоскости перпендикулярной к эклиптике и проведенной чрез первое место звезды. Пусть $2a$ расстояние между этими двумя положениями земли, δ угол, под которым видно расстояние $2a$ из звезды. Если углы α, β, δ не удовлетворяют уравнению $\alpha = \beta + \delta$, то это будет зна́ком, что сумма трех углов этого треугольника не равна двум прямым углам. Можно так выбрать звезду, что $\delta = 0$ и можно всегда предположить, что существует линия x такая, для которой

$$\Pi(x) = \alpha.$$

Если $\delta = 0$, то прямые, проведенные от двух положений земли к звезде могут почитаться за параллельные, вследствие чего должно быть $\beta = \Pi(x + 2a)$, откуда следует согласно с доказанным выше, что

$$\operatorname{tang} \frac{\alpha}{2} = e^{-x}, \quad \operatorname{tang} \frac{\beta}{2} = e^{-x-2a}.$$

Всякий раз, когда α и β в наблюдениях звезды, для которой $\delta = 0$ окажутся различными, два последние уравнения дадут x и a, выраженные посредством линии, принятой за единицу в пангеометрии. Таким образом, зная угол параллельности $\Pi(x)$ для определенной линии x, можно вычислить угол $\Pi(y)$ для всякой линии y [366].

ПРИМЕЧАНИЯ



ГЕОМЕТРИЯ

Сочинение «Геометрия» на первый взгляд является учебником — «классической книгой», т. е. руководством для прохождения элементарной геометрии в классах гимназий. Именно такое назначение дал ему попечитель Казанского учебного округа М. Л. Магницкий, направляя рукопись «Геометрии» на отзыв академику Фуссу [1]).

Это неверно. «Геометрия» — повторительный курс, составленный Лобачевским на основе лекций, читанных студентам Казанского университета на протяжении ряда лет. Он далек от полноты школьного учебника и отражает взгляды Лобачевского больше на обоснование и строение геометрии, чем на ее преподавание в среднем учебном заведении. В творчестве Лобачевского «Геометрия» занимает в 1823 году такое же место, какое занимают в 1835—36 годах его «Новые начала геометрии с полной теорией параллельных». Оба сочинения очень близки между собой и написаны по одному и тому же плану. Несомненно, что, составляя «Новые начала», Лобачевский отправлялся от «Геометрии».

На лекции Лобачевского и на сочинение «Геометрия» оказали, конечно, большое влияние педагогические идеи французских энциклопедистов, в первую очередь Даламбера. Это подробно освещено в превосходных вводных статьях В. Ф. Кагана к сочинению Лобачевского «Геометрия» [2]). Но основным для Лобачевского было показать студентам не то, ка́к нужно учить школьников геометрии, а что́ лежит в основе этой науки, ка́к она развивается из своих начальных положений. В этой своей задаче Лобачевский был несомненно близок Евклиду, но стоял он на совершенно иных, материалистических позициях.

---

[1]) См. «Материалы для биографии Н. И. Лобачевского». Собрал и редактировал Л. Б. Модзалевский, М. — Л., 1948, стр. 155, № 189 и стр. 157, № 191. [В настоящем издании эта книга в дальнейшем цитируется просто «М о д з а л е в с к и й».]

Отзыв Фусса помещен на стр. 389—390 настоящего издания. Разбор отзыва, сделанный В. Ф. Каганом, имеется в книге: Н. И. Л о б а ч е в с к и й, Полн. собр. соч., т. II, стр. 39—42.

[2]) «Учебная литература по элементарной геометрии в конце XVIII и в начале XIX столетий» и «Обзор сочинения „Геометрия“», Н. И. Л о б а ч е в с к и й, Полн. собр. соч., т. II, стр. 9—42.

«Геометрия» была подготовлена Лобачевским к изданию летом 1823 года. Эта дата особенно важна потому, что она стоит непосредственно перед великим открытием Лобачевского — неевклидовой геометрией. Уже через год, в 1824 году, Лобачевский, повидимому, владел основными понятиями новой геометрии [1]).

Незадолго до представления «Геометрии» к изданию, в 1822—1823 гг. Лобачевский подробно изложил свои взгляды на строение геометрии и принципы ее преподавания в университете в своем «Обозрении 1» [2]). «Обозрение 1» является как бы проспектом для «Геометрии», а «Геометрия» — реализация плана, изложенного в «Обозрении 1».

В «Обозрении 1» Лобачевский указывает на две основные трудности при построении геометрии.

Первая из них — «трудность различать составленные понятия от приобретенных» [3]) (т. е. выводимые человеком от взятых из природы). «Этого еще нет ни в одной геометрии», утверждает Лобачевский, и в этом он совершенно прав: такая постановка вопроса была дана впервые Лобачевским.

«Другого рода трудность в Геометрии представляет параллелизм линий, трудность до сих пор непобедимую» [4]). Эта трудность была хорошо известна — она имела двухтысячелетнюю давность, и ее безуспешно пытались преодолеть крупнейшие математики многих веков и народов.

В «Геометрии» делается попытка преодолеть первую трудность. Определяя геометрию как «часть чистой математики, в которой предписываются способы измерять пространство», Лобачевский указывает на единственное «удерживаемое от тел природы», сохраняемое в геометрии свойство — *протяжение* тел, которое в свою очередь определяется через их *прикосновение*. Эта идея через год после «Геометрии» получит свое развитие в «Обозрении 2» [5]), а затем — в основных сочинениях Лобачевского — «Краткое изложение основ геометрии» (1826), «О началах геометрии» (1829), «Новые начала геометрии» (1835).

Вторая трудность была преодолена великим открытием Лобачевского. Неевклидова геометрия еще не появляется в «Геометрии», но строение этого сочинения показывает, что Лобачевский уже вплотную подошел к ней.

---

[1]) См. об этом на стр. 388 этой книги.

[2]) Сокращенное название «Обозрения преподавания чистой математики на 1822—1823 год», принятое в этой книге. Опубликовано в сборнике: Модзалевский, стр. 201—216.

[3]) Модзалевский, стр. 204.

[4]) Там же, стр. 205.

[5]) «Обозрение преподавания чистой математики на 1824—1825 год», Модзалевский, стр. 173—185.

«Геометрия» естественно разделяется на три части, примерно одинаковые по объему.

Первая часть — главы I—V — охватывает *абсолютную геометрию,* т. е. не зависящую от постулата о параллельных линиях. Этот материал Лобачевский отобрал почти с исчерпывающей полнотой. Фузионизм Лобачевского (одновременное рассмотрение геометрии на плоскости и геометрии в пространстве) объясняется как его материалистическими установками, так и стремлением выделить все положения абсолютной геометрии.

Вторая часть — главы VI—IX — собственно евклидова геометрия в той ее части, где измерения состоят в сравнении фигур и тел друг с другом при помощи разложения их на когруэнтные части без предельного перехода.

Наконец, последняя часть — главы X—XIII — посвящена измерениям объема пирамиды, длины окружности и площади круга, объемов и поверхностей круглых тел — всех тех величин, которые определяются и вычисляются при помощи перехода к пределу. Этот переход Лобачевский всегда проводит прямым интегрированием (в элементарном изложении), которое было указано еще Архимедом и позже широко использовано Лобачевским в его «воображаемой геометрии».

Отдельные существенные особенности «Геометрии» изложены в примечаниях к каждой главе и к отдельным местам сочинения. Здесь мы укажем только на две из них.

В основе системы геометрии Лобачевский полагает только определения; ни в «Геометрии», ни в своих последующих сочинениях Лобачевский не приводит *аксиом.* Свои «Геометрические исследования по теории параллельных линий» он начинает пятнадцатью предложениями, которые принимает за исходные или известные [1]); большинство из них представляет собой теоремы, доказательства которых общеизвестны; другие обычно входят в определения или аксиомы; Лобачевский не делает между ними различия. Даже в «Новых началах геометрии с полной теорией параллельных», в этой фундаментальной попытке построения всей системы геометрии, Лобачевский не приводит аксиом, а дает *доказательства* даже самых очевидных предложений, которые Евклид либо постулирует, либо просто опускает, но в дальнейшем неявно использует. Например, Лобачевский доказывает в «Новых началах геометрии» такие теоремы: «Через две точки пространства можно провести плоскость», «В пересечении двух плоскостей происходит прямая линия», «Прямые сливаются как скоро проходят через две точки» и т. д.

---

[1]) См. стр. 96—97 этой книги.

Лобачевский не отрицает необходимости аксиом вообще. Рассматривая, например, теорию измерения геометрических величин в тех же «Новых началах геометрии», он говорит, что «нельзя здесь обойтись без особых вспомогательных предложений, которые принимают уже за аксиомы» [1]) и вводит три аксиомы измерения площадей. Но в основание всей геометрической системы Лобачевский ставит не аксиомы, а первоначальные, неопределимые понятия «прикосновение», «протяжение», «тело» — понятия, непосредственно воспринимаемые нами из реального пространства. Аксиому же о параллельных линиях (пятый постулат Евклида) заменяет общая теория, которую он впоследствии назовет «Пангеометрия» и в которой «обыкновенная геометрия будет частный случай» [2]).

Конечно, с современной точки зрения такая система не является логически выдержанной. Как и Евклид, Лобачевский фактически опирается на положения, не высказанные явно. Но даже в своем раннем произведении «Геометрия» в вопросах строгости Лобачевский был впереди своих современников, и обвинение Фусса о том, что в этой книге «и следу нет» строгости [3]), совершенно неправильно. Еще в большей степени это относится к последующим работам Лобачевского. Естественно, что Лобачевский не мог достигнуть современного уровня строгости — аксиоматического обоснования геометрии установленного в начале XX столетия, — оно могло быть проведено именно на основе великого открытия Лобачевского [4]).

Остановимся еще на том принципе, которому Лобачевский следует при расположении материала. Акад. Гурьев в предисловии к своему учебнику геометрии [5]) говорит, что система изложения может быть расположена «или соображенная с началами, или соображенная с предметами». Расположение, сообразованное с началами, восходит от простейших понятий и образов к более сложным, рассматривая прямые линии, углы, треугольники, четырехугольники, многоугольники, окружности и т. д.; при изучении более сложного объекта в этой системе можно пользоваться заранее подготовленными установленными свойствами более простых объектов. Изложение, сообразованное с предметом, заключается в том, что каждый раз (а не раньше, не предварительно) в соответствии с основной задачей приводятся те подсобные предложения, которые здесь именно нужны.

---

1) Н. И. Лобачевский, Полн. собр. соч., т. II, стр. 166.

2) См. сочинение «Пангеометрия», стр. 139 этой книги.

3) См. стр. 389 этой книги.

4) Дальнейшая, заключительная часть этого вводного примечания к «Геометрии», взята из статьи В. Ф. Кагана «Обзор сочинения геометрии», Н. И. Лобачевский, т. II, стр. 36—37.

5) С. Я. Гурьев, Основания геометрии, СПб, 1811.

С точки зрения такого подразделения, если его считать правильным, система Евклида «сообразована с началами» (так Гурьев и утверждает), система же Лобачевского «сообразована с предметами». Например, Лобачевский отодвигает учение о равенстве треугольников до пятой главы и излагает даже учение о правильных многоугольниках и правильных многогранниках без его помощи, пользуясь непосредственным наложением. Не всегда это дает хорошие результаты. Конечно, наложение делает многие доказательства более наглядными, но это нередко вызывает длинноты и повторения. Это отмечено в своем месте в примечаниях к тексту «Геометрии».

Вступление

Небольшое вступление [1]) Лобачевский начинает определением геометрии как «части чистой математики, в которой предписываются способы измерять пространство», и указывает на основное свойство тел природы — протяжение, которое только и сохраняется («удерживается») в геометрии от всех его физических свойств. Сразу же появляется понятие *прикосновения*, которое Лобачевский позже поставит в основание всей своей геометрической системы. Затем вводятся без всяких определений понятия об основных геометрических величинах — линиях, поверхностях и телах, которые «можно представить», хотя «в природе все тела троякого протяжения», об их измерении и взаимном положении (касание, пересечение, слияние). Вступление заканчивается указанием на границу между геометрией и анализом: «Геометрия оканчивается там, где покажутся способы измерения всех геометрических величин».

В этом вступлении ярко проявились две существенные общие черты, характерные как для сочинения «Геометрии», так и для других его работ. Во-первых, общее материалистическое направление мысли Лобачевского [2]) сказывается как в самой точке зрения на существо и задачу геометрии, так и в выборе основных понятий, из которых он исходит. Во-вторых, эти основные понятия всегда носят топологический характер. В более обширном сочинении «Новые начала геометрии» эти черты проявилась с большей определенностью [3]), но и в настоящем небольшом сочинении, в «Геометрии», их уже нельзя не усмотреть.

---

[1]) Названия «Вступление» в рукописи Лобачевского нет; оно вставлено редакцией (как и в Полном собрании сочинений, т. II, стр. 43).

[2]) См. об этом на стр. 386.

[3]) Н. И. Лобачевский, Полн. собр. соч., т. II, в особенности — в главе I сочинения («Первое понятие в геометрии», стр. 168—179; см. примечания к ней на стр. 467—472).

[1] В соответствии с основной своей установкой: «Вся математика есть наука об измерении» 1), Лобачевский в противовес Евклиду начинает свое сочинение утверждением, что геометрия есть «часть чистой математики, в которой предписываются способы измерять пространство». Эта метрическая точка зрения была прогрессивной для того времени; она представляла собой протест против обучения основам геометрии по чисто формальной системе Евклида, отрывающей геометрию от каких бы то ни было ее приложений, сводящей ее только к тонкой логической концепции. Нет сомнения, что это был уже переход от идеалистических тенденций верного ученика Платона к материалистической установке. Правда, это был еще явно узкий механистический материализм, который и раньше имел немало сторонников. Ярким представителем его был Даламбер. Однако для студенческой аудитории того времени это уже был, несомненно, недостаточно широкий взгляд, не оставлявший в геометрии ничего, кроме метрики, и притом взгляд уже недостаточно современный. Со времени опубликования плана Даламбера прошло уже 60 лет; в это время именно во Франции шло возрождение синтетических методов; Монжем уже была опубликована «изобразительная» или, как теперь говорят, «начертательная геометрия» 2), дисциплина, в которой метрические задачи играют доминирующую роль, но которая имеет уже существенно новые задачи. Еще раньше появилась «геометрия положения» Карно 3). Целая школа развивала эти идеи в «Анналах Жергона», а в 1822 году уже появился знаменитый трактат Понселе 4); говорить в ту пору студентам, что геометрия занимается исключительно измерением пространственных протяжений, было односторонним и во всяком случае уже несовременным. Очевидно, в те годы научные течения еще медленно докатывались до далекой Казани.

[2] Эту точку зрения на соприкосновение как на основное свойство геометрических тел Лобачевский сохранил и развивал во всех своих дальнейших сочинениях, делая понятие о прикосновении тел точкой отправления при построении всей геометрии, развертывая эту идею в целую систему. Первый замысел этой системы мы видим уже в «Обозрении 1» 5) и здесь, в «Геометрии», в первых же строках; Лобачевский, таким образом, пришел к нему очень рано. Он уже начинает с него изложение геометрии, а через год, в 1824 году

1) «Обозрение 1», Модзалевский, стр. 205.
2) G. Monge Géométrie descriptive, Paris, 1799.
3) L. N Carnot, Géométrie de position, Paris, 1803.
4) J. V. Poncelet, Traité des propriétés des figures, Paris, 1822.
5) См. стр. 387 этой книги.

в своем «Обозрении 2» делает понятие о прикосновении краеугольным камнем при построении всей геометрии:

> «Я думаю, что в геометрических телах рассматривается то свойство тел природы, которое называют *прикосновением* [1]). Тела одинаковы геометрически те, которые наполняют одно место, которых одинаково прикосновение к окружающему пространству. В этом только отношении измеряются тела в геометрии, и это свойство тел должно быть ее предметом. Рассмотрим теперь, в чем должны заключаться ее основания» [2]).

И Лобачевский намечает тот план построения основ геометрии, опирающийся на понятие прикосновения, который позже будет реализован в работах «Краткое изложение основ геометрии» (1826) и «О началах геометрии» (1829) и обстоятельно развернут в его фундаментальном сочинении «Новые начала геометрии с полной теорией параллельных» (1835).

[3] Взгляды Лобачевского на линии, поверхности и тела отчетливо выражены в его «Обозрениях». В «Обозрении 1» (1822—1823) Лобачевский пишет:

> «Мы познаем в природе одни только тела; следовательно, понятие о линиях и поверхностях суть понятия произведенные, а не приобретенные, и посему не должны быть принимаемы за основание математической науки» [3]).

В «Обозрении 2» (1824—1825) эта мысль выражена еще более ярко:

> «Поверхности и линии не существуют в природе, а только в воображении: они предполагают, следовательно, свойство тел, познание которых должно родить в нас понятия о поверхностях и линиях» [4]).

[4] Лобачевский с самого начала делит геометрию на лонгиметрию, планиметрию и стереометрию, однако в метрическом понимании этих терминов (измерение длин, площадей и объемов). Слово «планиметрия» Лобачевский, таким образом, понимает не в том смысле, в каком он употребляется в настоящее время, как геометрия плоскости. Однако именно в том значении, в каком его употребляет Лобачевский, этот термин был распространен в математической литературе со времени своего возникновения, повидимому, в XII в. (Hugo Physicus). Как геометрия плоскости термин «планиметрия» появляется

---

1) Курсив Лобачевского.

2) Модзалевский, стр. 177.

3) Там же, стр. 204.

4) Там же, стр. 177.

только в конце XVIII в. в сочинении Мейнерта[1]) в 1790 г., т. е. всего за 30 лет до составления «Геометрии»; утвердился же он в этом значении значительно позже[2]). Целесообразность этого подразделения геометрии уже оспаривалась в эпоху Лобачевского, оспаривается она и в настоящее время. Даламбер его принимает примерно в той форме, как это приведено здесь у Лобачевского. Акад. С. Е. Гурьев в предисловии к своим «Основаниям геометрии»[3]) (1811) писал об этом следующее:

> «Сверх того, самый предмет геометрии, как то читатель усмотрит ниже, совсем не требует столь, повидимому, естественного разделения геометрии на геометрию линий, геометрию поверхностей и геометрию тел. Сие только есть один вид надобности, и Лежандр, один из математиков первого класса, предпринявший в сии последние дни исправить Елементы геометрии, не колебался пренебречь оною, мешая свойства линий со свойствами поверхностей, как сделал Евклид».

Это замечание автора, со взглядами которого не всегда можно согласиться, всё же особенно справедливо в том отношении, что деление это часто оставалось чисто формальным и авторами учебников, даже приводившими его, не выдерживалось. Менее всего это деление осуществляется в «Геометрии»; Лобачевский в действительности стоит, напротив того, на так называемой фузионистской точке зрения.

Во всем, что не составляет предмета прямых измерений, Лобачевский не отделяет предложений плоской геометрии от аналогичных предложений, относящихся к пространству. Так, уже во второй главе он рядом с кругом рассматривает шар и сферу. И здесь уже лежат зародыши той системы геометрии, которую он строит в «Новых началах». В третьей главе — «О перпендикулах» — он рассматривает взаимное расположение плоскостей, а в четвертой рядом с измерением прямолинейных углов, рассматривает измерение телесных углов, рядом с многоугольниками — многогранники. Лобачевский, таким образом, уже в начале века стоял на позиции фузионизма, которую в конце XIX в. защищали многие математики и педагоги[4]). Фузионистскую точку зрения при построении начал геометрии нельзя считать общепризнанной; она имеет многих противников; в то время она была еще

---

[1]) F. Meinert, Lehrbuch der Mathematik, II, Halle, 1790.

[2]) Подробнее об этом см. J. Tropfke, Geschichte der elementar-Mathematik, 2. Aufl., Berlin und Leipzig, 1923, т. IV, стр. 33—34.

[3]) С. Гурьев, Основания геометрии, СПб, 1811, 674 стр.

[4]) Подробнее об этом см. G. Loria, La fusione della planimetria con la stereometria, «Periodica di Matematica», 15, Livorno, 1899.

совершенно нова; мы не знаем никого, кто до Лобачевского становился бы на эту точку зрения. Между тем, именно при повторном обзоре геометрии проводить эти сближения двумерных и трехмерных соотношений безусловно целесообразно.

Но, как уже сказано выше, Лобачевский имеет при этом и своеобразную, характерную для его дальнейшего творчества цель: он тщательно отбирает в первой части своего сочинения весь тот материал, который не зависит от постулата о параллельных линиях!

[5] Сведéние измерения к прикосновению при помощи промежуточной операции *наполнения*, намеченное Лобачевским впервые в «Геометрии», было им разъяснено сначала кратко в «Обозрении 2» [1]) и в сочинении «О началах геометрии» [2]), а затем подробно изложено в сочинении «Новые начала геометрии с полной теорией параллельных» (гл. I, ст. 2) [3]).

[6] Это определение, конечно, дефектно; в точке перегиба плоской кривой касательная переходит с одной ее стороны на другую; для кривой двоякой кривизны это определение лишено содержания. Правильное общее определение касательной, установленное Ферма и сообщенное Декарту в 1638 году, как предельного положения секущей, по существу, настолько элементарно, что в сочинении такого типа, как «Геометрия», могло бы найти себе место. Лобачевский предпочел упрощенное определение, имея, повидимому, в виду, что ему придется применять его только к окружности. То же относится и к касанию поверхностей.

[7] Это определение границы, которая отделяет геометрию в ее синтетическом построении от приложения анализа к геометрии, впервые намечено Лобачевским еще в «Обозрении 1» [4]):

> «Под началами геометрии разумею я ту часть геометрии, в которой нельзя обойтись не рассматривать геометрические величины в пространстве. Ход сей части геометрии таков, что здесь от частных случаев восходят постепенно к более и более общим; следовательно, совершенно обратный нежели в анализе, где от общих случаев переходят к частным. Способ учения начал геометрии не подлежит никакому общему правилу и не может быть никак заменен анализом; по крайней мере при нынешнем состоянии сей науки, а вероятно останется и навсегда таковым. Начала

1) Модзалевский, стр. 177 и 178.
2) Н. И. Лобачевский, Полн. собр. соч., т. I, стр. 187 и 188.
3) Там же, т. II, стр. 169—170.
4) Модзалевский, стр. 206.

геометрии продолжаются до тех пор, покуда будут сысканы общие правила для определения места в пространстве, для измерения треугольников и пирамид; тогда оканчивается синтез, и аналитическая геометрия продолжает науку в виде алгебры».

Свои соображения о границе анализа и синтеза в геометрии Лобачевский развивает и во всех своих дальнейших геометрических работах, особенно подробно в «Обозрении 2» [1]) и в «Новых началах геометрии с полной теорией параллельных» [2]). Эти вопросы имели для Лобачевского принципиальное значение, так как выясняли, до какого предела нужно довести синтетическое построение новой, «воображаемой геометрии», чтобы иметь уверенность в ее логической правильности. В заключении своего сочинения «О началах геометрии», в котором впервые было напечатано замечательное открытие Лобачевского, он пишет [3]):

«После того, как мы нашли уравнения (17), которые представляют зависимость углов и боков треугольника; когда, наконец, дали мы общие выражения для элементов линий, площадей и объема тел, все прочее в Геометрии будет уже аналитикой, где исчисления необходимо должны быть согласны между собою и ничего не в состоянии открыть нам нового, чего бы не заключалось в тех первых уравнениях, откуда должны быть взяты все отношения геометрических величин друг к другу».

Это же повторяет Лобачевский и в своем последнем сочинении «Пангеометрия» за год до смерти [4]):

«С этими уравнениями пангеометрия переходит в Аналитику и таким образом составляет особенную полную геометрическую теорию».

Глава I. Измерение линий

Глава I названа «Измерение линий», повидимому, в соответствии с установленным во введении общим делением геометрии. Но фактически она разбивается на три части. Первая часть содержит определения основных геометрических образов: прямой, плоскости, круга и его элементов. Вторая занимается измерением частей прямой и окружности; большое место в ней занимает изложение алгоритма Евклида. Наконец, третья посвящена измерению кривых линий. Сообразно этому глава разделена на три абзаца.

---

[1]) Модзалевский, стр. 173—174.

[2]) Н. И. Лобачевский, Полн. собр. соч., т. II, стр. 164—166.

[3]) Там же, т. I, стр. 260—261.

[4]) См. стр. 164 этой книги.

[8] Определение прямой линии разбито на две части, которые устанавливают, что прямая вполне определяется двумя точками как по своей форме, так и по положению в пространстве. Равные дуги равных окружностей удовлетворяют первому требованию: они сливаются, вернее, могут быть приведены в совмещение, когда у них общие концы, но не удовлетворяют второму: они могут и не совпадать при общих концах.

Это определение прямой в той или иной модификации, чаще всего в той форме, что прямая остается неподвижной, когда закреплены две ее точки, было широко распространено уже в древности. Его приводит уже Прокл в своих комментариях ко II определению в «Началах Евклида» [1]). Оно восходит, повидимому, еще к Герону Александрийскому (около 100 г. до н. э.). У Гильберта [2]) две части определения Лобачевского в некоторой модификации выражены в аксиомах I_1 (две различные точки A и B определяют прямую a), I_2 (любые две точки прямой определяют эту прямую). Вален во введении к своей «Абстрактной геометрии» [3]) говорит: «Предложение „двумя различными точками прямая однозначно определяется“, повидимому, в такой мере неразрывно связано с самым понятием прямой линии, что определению прямой естественно дать такое выражение, чтобы это предложение входило в его состав». Лобачевский ввел, таким образом, в определение прямой наиболее существенные (хотя и не все) ее признаки. Заметим еще, что это определение прямой Лобачевский, по существу, сохранил и в дальнейшем развитии своих идей по обоснованию геометрии (см. «Новые начала геометрии с полной теорией параллельных», гл. II, статья 25 [4]).

В большинстве современных систем оснований геометрии (например, у Гильберта [5])), прямая включается в состав *основных понятий* и ей не дают полного и явного определения; неявно она определяется всей системой аксиом геометрии [6]). Приведенные выше попытки определить прямую линию имеют, главным образом, историческое значение.

---

[1]) «Procli Diadochi... Commentarii», Leipzig, 1873, стр. 110. Другое, очень распространенное издание на латинском языке: «Procli Diadochi... libri IIII», Patavii 1560, стр. 63. Об этих изданиях комментариев Прокла см. Н. И. Лобачевский Полн. собр. соч., т. I, стр. 35.

[2]) D. Hilbert, Grundlagen der Geometrie. Первое издание, по которому приведена цитируемая формулировка, вышло в 1899 г. Последнее издание, значительно переработанное и дополненное, вышло в 1930 г. (7-е изд.; русский перевод с этого издания вышел в 1948 г.: Д. Гильберт, Основания геометрии, пер. под ред. П. К. Рашевского, М.—Л., 1948). В этом издании формулировки аксиом I_1 и I_2 изменены.

[3]) K. Th. Vahlen, Abstrakte Geometrie, Leipzig, 1905.

[4]) Н. И. Лобачевский, Полн. собр. соч., т. II, стр. 187.

[5]) См. сноску [2]) на этой странице.

[6]) Подробнее об этом см. в статье А. Н. Колмогорова «Аксиома» в первом томе Большой Советской Энциклопедии, изд. 2-е, стр. 613—616.

[9] Это определение плоскости, помимо недостаточной точности его формулировки, страдает существенными дефектами и по самому своему содержанию. Прежде всего Гаусс еще в очень молодом возрасте заметил, что существование поверхности, с которой прямая совмещается всякий раз, как имеет с нею две общие точки, нуждается в доказательстве в смысле совместимости этого определения со свойствами прямой линии. Уже в 1797 году в его дневнике значится запись: «Plani possibilitatem demonstravi». («Я доказал существование плоскости».) Не входя в большие подробности, ограничимся здесь замечанием, что Лобачевский, очевидно, и сам пришел к сознанию недостаточности этого определения. В последующие годы он не считал возможным сохранить это определение плоскости и строил его в совершенно ином порядке идей [1]-

[10] Относительно определения круга ограничимся только следующим замечанием. Лобачевский ни в «Геометрии», ни в последующих сочинениях не отличает строго круга от круговой линии. Однако проводимое часто в современной литературе разграничение окружности как линии и круга как части плоскости, ограниченной окружностью, Лобачевскому не чуждо; в главе II он указывает, что «плоскость, ограниченная круговой линией, называется обыкновенно кругом» [2]. Но систематически он этого разграничения не выдерживает, оно и в настоящее время далеко не всегда проводится, хотя и имеет свои преимущества.

Формулированное в конце определение окружности выясняется из другого определения, данного в «Новых началах геометрии с полной теорией параллельных», гл. II, ст. 36 [3]).

> «Плоскость, ограниченная замкнутой линией, называется вообще *фигурой*, а пограничная линия — окружностью».

Таким образом, Лобачевский разумеет под окружностью периферию всякой замкнутой части плоскости, в частности, круга. Формулировку, приведенную в тексте, вряд ли можно признать удачной.

[11] Построение метрики в геометрии всегда связано с большей или меньшей ее арифметизацией; и такая арифметизация Лобачевским действительно проводится. Спор о геометрической или арифметической теории пропорций, таким образом, решается сам собой: отношение для Лобачевского всегда есть число. Так как измерение по

---

1) См. «О началах геометрии» (Н. И. Лобачевский, Полн. собр. соч., т. I, стр. 191) и «Новые начала геометрии с полной теорией параллельных» (там же, т. II, стр. 181).

2) См. стр. 38.

3) Н. И. Лобачевский, Полн. собр. соч., т. II, стр. 199.

сути дела приводится к нахождению отношения двух значений величины (двух «коликих»), то Лобачевский в первой же главе приводит Евклидов алгоритм для разыскания общей меры; получающееся в результате отношение он выражает непрерывной дробью, которая действительно наиболее отражает геометрический процесс; некоторые авторы называют и самый алгоритм методом непрерывных дробей. В «Новых началах геометрии с полной теорией параллельных» (гл. III, статья 38[1])) Лобачевский указывает и значение этого выражения «содержания (т. е. отношения) двух линий», дающего своими подходящими дробями исключительно хорошие приближения. Лобачевский вообще очень ценил непрерывные дроби и их приложения[2]).

В алгоритме Евклида особую роль играет, как известно, случай несоизмеримости; его обработка как с теоретической, так и с педагогической стороны служила предметом многостороннего обсуждения и споров со времен Евклида и, можно сказать, вплоть до наших дней. Трудность заключается здесь в двух моментах: во-первых, в самом определении несоизмеримого отношения, т. е. иррационального числа; во-вторых, в учении о пропорциональных величинах разного рода, т. е. в доказательстве равенства или неравенства иррациональных чисел или несоизмеримых отношений. Евклид сосредоточивает внимание на второй проблеме: он определяет не самое отношение, которое как число для него вовсе не существует, а только условия, при которых два отношения равны или не равны; для этого он и излагает своеобразную теорию пропорций. Даламбер также игнорирует первую проблему. Но он молчаливо всегда постулирует существование числа, выражающего отношение двух несоизмеримых значений одной и той же величины; равенство несоизмеримых отношений он рекомендует всегда доказывать приведением к абсурду; Лежандр и Лакруа так это неизменно и выполняют. Лобачевский же идет более прямым путем.

В современной математике в теории иррациональных чисел или несоизмеримых отношений внимание сосредоточивается на первой проблеме. В той или иной форме несоизмеримое отношение всегда определяется совокупностью его последовательных приближений, и тогда равенство несоизмеримых отношений заключается в равенстве всех соответствующих приближений. К этой последней точке зрения по существу приближается и Лобачевский. Строгий, всегда последовательный эмпирик-материалист, он признает только процессы, фактически выполнимые. Разыскивая отношение так называемым

---

[1]) Н. И. Лобачевский, Полн. собр. соч., т. II, стр. 201—203.

[2]) Н. И. Лобачевский, Алгебра или вычисление конечных. Там же, т. IV, стр. 100.

алгоритмом Евклида («Начала», книга VII, предложение 2), т. е. последовательным делением, он считает, что этот процесс заканчивается тогда, когда остаток перестает быть доступным нашим ощущениям. Он говорит:

> «Наконец не должно выходить остатку или, что все равно, быть так малу, что чувства не могут его давать знать, того менее орудие мерять».

В этот момент процесс обрывается, отношение представляет собой рациональное число, выражаемое непрерывной дробью. Для Лобачевского, таким образом, существуют только рациональные приближенные отношения, выражаемые с любой доступной нам точностью. Вопрос об иррациональных отношениях как бы отпадает; это, конечно, дефект теоретической установки; но при установлении пропорциональности Лобачевский доказывает, что соответствующие отношения будут равны, какова бы ни была доступная нам точность. По существу это, конечно, лишь иное выражение той же идеи, которая лежит в основе современной постановки вопроса; немного слов нужно изменить в формулировках Лобачевского, чтобы к ним присоединился современный математик.

[12] Лобачевский вводит метрическую систему с ее децимальными подразделениями; ниже, в главе II, он делит угол на 100 градусов. Как, может быть, никто другой в России того времени, он понимал значение единого стандарта и упрощенной техники вычисления. И с первого же сочинения, предназначенного для печати, он выступает со своими своеобразными взглядами, не страшась нападок, которые не замедлили последовать. В своем отзыве на сочинение «Геометрия» академик Фусс с негодованием говорит[1]):

> «Странно, что сочинитель принимает французский метр за единицу при измерении прямых линий и сотую часть четверти круга, под именем градуса, за единицу при измерении дуг круга. Известно, что сие разделение выдумано было во время французской революции, когда бешенство нации уничтожить всё прежде бывшее распространялось даже до календаря и деления круга».

[13] Нельзя не отметить, что определение длины кривой как предела длины вписанной в нее ломаной линии, когда все звенья последней бесконечно убывают, вполне соответствует современной точке зрения на этот вопрос. Вообще в этом рассуждении было бы достаточно внести незначительные изменения формулировки, чтобы оно могло найти себе место в настоящее время в научном изложении метрической геометрии.

---

1) См. стр. 389 этой книги.

Глава II. Об углах

Содержание этой главы выходит далеко за пределы ее названия. Собственно углам посвящена только первая половина главы, в которой содержатся сведения о плоских и двугранных («плоскостных») углах и об их измерении. Вторая же половина главы содержит сведения о шаре, многоугольниках, многогранниках и обо всех понятиях, связанных с ними; повидимому, было бы целесообразным выделить эту половину в отдельную главу. Но, как и во всем сочинении, Лобачевский, установив понятие об угле, использует его возможно шире и приводит всё, что с ним связано.

Лобачевский откладывает до главы IV понятие о многогранном («телесном») угле, хотя, повидимому по недосмотру, пользуется этим понятием уже в конце главы II, при определении пирамиды.

В заключительной части главы появляется важное понятие *объема* тела как пространства внутри тела. Этому понятию место, конечно, раньше — во введении.

[14] Введение десятичного деления углов и, в частности, центезимального деления прямого угла, которое акад. Н. И. Фусс в своем отзыве о «Геометрии» (стр. 389) рассматривает как порождение французской революции, в действительности имеет очень продолжительную и своеобразную историю [1]). На цэнтезимальном делении угла в 1585 году настаивал известный голландский математик С. Стевин (Simson Stevin), которому принадлежит открытие десятичных дробей. В XVII в. деление градуса на сто частей фактически проводится, главным образом, в Англии в первых логарифмических таблицах тригонометрических величин Бриггом (Briggs, 1633), Роэ (Roe, 1633), Аутредом (Outred, 1657). Мысль сделать в этом направлении последний шаг и установить деление прямого угла на сто частей возникла в первый раз в Германии. В 1783 году Шульце (J. C. Schulze) выпустил справочник («Taschenbuch»), в котором сообщает, что для него были уже готовы тригонометрические таблицы, когда Лагранж, состоявший тогда директором Берлинской астрономической обсерватории, пришел к мысли перечислить их по центезимальной системе деления прямого угла; это действительно было выполнено, и центезимальные таблицы были выпущены Гобертом и Иделером [2]). Таким образом, не только

[1]) Подробные сведения об этом см. J. W. Glaisher, Report on mathematical tables, Report of the British Association, 1873; A. Schulke, Zur dezimalteilung des Winkels, Zeitschrift für mathem. und naturwissensch. Unterricht, **27**, 1896. Наиболее обстоятельно этот вопрос изложен у Мемке: R. Mehmke, Bericht über die Winkelteilung, «Jahresbericht d. Deutsch. Mathem. Vereinigung», 8, 1890. Последняя работа содержит детальные литературные указания.

[2]) J.-Rh. Hobert u. Ch. L. Ideler, Neue trigonometrische Tafeln, Berlin, 1792.

возникновение идеи о центезимальном делении угла, но даже первое ее осуществление имело место не во Франции, а в Англии и Германии. Но в пору установления метрической системы тот же вопрос возник и во Франции. Преимущества центезимального деления обстоятельно изложил Лаплас в своей «Системе мира» [1]); они подробно обоснованы в докладе Парижской академии наук, сделанном 12 марта 1791 года комиссией в составе Борда, Лагранжа, Лапласа и Монжа. На центезимальном делении настаивали также Даламбер, Леверье, Био и др. Центезимальная система была в начале XIX в. принята в учебных руководствах Лежандра, Лакруа, Бурле и др.

Относительно практического осуществления центезимального деления мы вынуждены ограничиться ссылкой на указанную выше литературу. Заметим только, что на эти начинания было затрачено много усилий; они не имели большого успеха, главным образом, потому, что требовали сложной и тщательной переработки огромного табличного материала и карт, а также сооружения новых астрономических инструментов. И все же специалисты считают, что перед этими трудностями нельзя останавливаться.

Вряд ли может быть сомнение в том, что именно этой системе измерения углов принадлежит будущее; она была результатом глубоких соображений величайших ученых всего мира. И то обстоятельство, что Лобачевский присоединился к ним, не боясь нападок со стороны рутинеров, говорит о живом прогрессивном чутье и составляет его несомненную заслугу.

[15] Это своеобразное определение угла связано с метрической точкой зрения, на которой Лобачевский твердо стоит. Угол для него только число (хотя бы и именованное); самый образ отходит на задний план. Это определение угла Лобачевский сохраняет во всех своих сочинениях. В сочинении «О началах геометрии» оно еще более уточняется: единица дуги выбирается так, чтобы вся окружность выразилась числом 2π; к этому прибавлено:

> «Так выраженная дуга называется *линейным углом* или углом тех двух линий, которые, идя чрез концы дуги, встречаются в центре круга» [2]).

[16] Лобачевский, повидимому, хочет сказать, что это свойство должно входить в самое определение плоскости. Действительно, толкование, близко подходящее к дословному тексту, заключается в следующем: это — «необходимое требование», постулат, который должен

---

[1]) P. S. Laplace, Exposition du système du monde, Paris, 1796. В третьем издании (Paris, 1808) это изложение находится на стр. 72—73.

[2]) Н. И. Лобачевский, О началах геометрии, Полн. собр. соч., т. I, стр. 192.

быть в той или иной форме включен в определение плоскости или приобщен к нему. Из того определения плоскости, которое дано выше в тексте, оно не вытекает.

В своих последующих работах («О началах геометрии», «Новые начала геометрии с полной теорией параллельных») Лобачевский дает совершенно другое определение плоскости: он называет *плоскостью* поверхность, где пересекаются равные сферы вокруг двух постоянных центров [1]).

[17] Таким образом под двугранным углом Лобачевский разумеет его линейный угол, т. е. опять-таки число (в обычной терминологии — численное значение линейного угла). Однако такому определению должно было бы быть предпослано доказательство того, что все линейные углы одного и того же двугранного угла равны. К тому же это доказательство не должно опираться на свойства параллельных линий. Такое доказательство действительно может быть дано, но оно требует некоторой стереометрической подготовки [2]).

[18] Определение шаровой поверхности приведено именно здесь, повидимому, потому, что Лобачевский отождествляет (метрически) телесный угол с поверхностью, вырезываемой его конической оболочкой на сфере, подобно тому как прямолинейный угол он отождествляет с дугой, вырезываемой его сторонами на окружности (см. гл. IV). Может быть, именно с точки зрения его «предметной» системы расположения материала это определение было бы уместно поместить в начале главы IV. Лобачевский правильно отмечает возможность измерять одни части сферы другими частями той же сферы вследствие того, что части сферы могут скользить одна по другой, как дуги одной и той же окружности. Однако аналогия здесь неполная вследствие двумерности сферы: движения на ней происходят не с одной, а с тремя степенями свободы; разыскание отношения двух частей сферы здесь поэтому значительно сложнее, чем для дуг круга. Гораздо бо́льшее значение имеет именно в той системе, которая проведена в «Геометрии», другая аналогия: сфера имеет конечную величину и каждая площадь на ней может быть выражена в частях сферы как дуга окружности в частях всей окружности (см. ниже, примечание [32]).

[19] Определения прямоугольного треугольника, гипотенузы и катетов были бы, конечно, уместнее после того, как доказано, что треугольник не может иметь более одного прямого угла.

Отрезок, в современной терминологии — сегмент; *вырезок* — сектор.

---

1) Н. И. Лобачевский, Полн. собр. соч., т. I, стр. 191 и т. II, стр. 181.

2) См. В. Ф. Каган, Основания геометрии, ч. I, М.—Л., 1949, стр. 405—406.

Глава III. О перпендикулах

Эта глава содержит большой материал абсолютной геометрии, так или иначе связанный с понятием перпендикулярных прямых и перпендикулярных плоскостей, введенных в предыдущей главе. Из геометрии на плоскости в этой главе приводятся свойства равнобедренных треугольников и основанные на них способы построения перпендикуляра; из геометрии в пространстве даны определение перпендикуляра к плоскости, его свойства и соответствующие построения.

В конце главы доказывается, что перпендикуляр есть кратчайшее расстояние от точки до прямой и до плоскости.

В главе при доказательствах широко используется движение; подробнее об этом сказано в примечаниях к соответствующим местам.

[20] Это и последующие предложения Лобачевский доказывает при помощи движения.

Одним из коренных вопросов в деле построения элементарной геометрии является та роль, которая при этом должна принадлежать движению. Евклид отводит движению незначительное место: установив при помощи движения равенство треугольников по двум сторонам и углу между ними (предложение 4 книги I) и по трем сторонам (предложение 8 книги I), Евклид в дальнейшем тщательно его избегает, заменяя его формальными рассуждениями, основанными на условиях равенства треугольников. Даламбер в противовес этому предлагает пользоваться движением и, в частности, наложением как основным методом геометрического доказательства. Лежандр в некоторой степени следует этому указанию. Лобачевский идет по этому пути решительнее, чем это делал кто-либо до него или в ближайшие годы после него. Всякое сопоставление в смысле установления условий равенства или неравенства Лобачевский проводит, сводя соответствующие фигуры в пространстве. Хорошо известно, что позднее Гельмгольцем, Софусом Ли и Клейном движение было признано основной характеристикой пространства.

[21] Последнее соображение фактически имеет в виду доказать, что из одной и той же точки A не могут выходить два перпендикуляра AB и AC к одной и той же прямой BC. Проще всего это доказывается при помощи теоремы о внешнем угле, как это обычно и делается в наших руководствах. Но и в «Началах» Евклида построение перпендикуляра из точки на прямую (I, 12) излагается до теоремы о внешнем угле (I, 16). Прокл, комментируя это предложение, вскрывает коренящийся в нем дефект.

Рассуждение Лобачевского сводится к тому, что прямые AB и AC, если бы они обе были перпендикулярны к BC, при повороте тре-

угольника ABC вокруг BC до его возвращения в ту же плоскость пошли бы по своим продолжениям и встретились бы вторично в точке A', симметричной с A относительно BC. Это рассуждение проведено в «Началах» Лежандра (предложение I, 13). Рисунок Лобачевского, можно сказать, совпадает с рисунком 31 в «Началах» Лежандра.

[22] Это рассуждение не обосновано, как и совершенно аналогичное рассуждение в предложении 1 книги I «Начал» Евклида. Точное обоснование требует соображений, которые опираются на непрерывность прямой и окружности, или иных постулатов, характеризующих строение прямой и плоскости. Подробнее об этом см. «Начала Евклида», примечания к предложению 1 книги I [1]).

[23] Это место нечетко выражено, но мысль автора совершенно ясна; графически построение точки D выполняется циркулем обычным образом.

Далее треугольник AEB налагается на AEC; их совмещения возможно, потому что $\angle ABD = \angle ACD$, $\angle EBD = \angle EDC$ и, следовательно, $\angle ABE = \angle ACE$.

[24] Это доказательство относится к числу тех, которые Лобачевский осуществляет, пользуясь непосредственно движением и избегая более формальных рассуждений, основанных на равенстве треугольников (см. примечание [20]).

[25] Доказательство совершенно точное; к нему также можно отнести предыдущее примечание. Отметим отчетливо его детали. Рассматривая три плоскости как твердую (неизменяемую) систему, повернем всю фигуру так, чтобы угол KHD совместился с равным ему углом BHI, плоскость EF совместится, следовательно, с самой собой. Плоскости AB и CD, пересечения которых с плоскостью EF не изменились, как перпендикулярные к EF, также совместятся каждая с самой собой. Остальное ясно.

[26] «Восставить перпендикул на плоскости» — под этим понимается проведение перпендикуляра к плоскости из точки на ней лежащей.

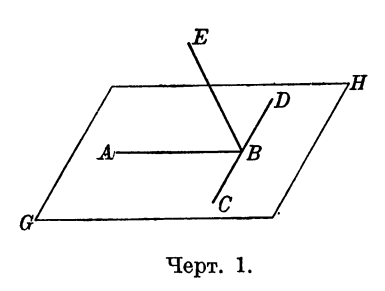
[27] Подразумевается, что этот второй перпендикуляр проводится через точку пересечения первого перпендикуляра к заданной линии.

---

1) «Начала Евклида», кн. I—VI, пер. с греческого и комментарии Д. Д. Мордухай-Болтовского, М. — Л., 1948, примечание 30 (стр. 255).

[28] Для ясности приводим построение на черт. 1, как это сделано Лобачевским в двух предыдущих абзацах.

Пусть AB — данная прямая в данной плоскости GH. В этой плоскости проводим прямую CD, перпендикулярную к AB, затем проводим прямую EB, проходящую также перпендикулярно к CD, но вне плоскости GH; тогда ABE и будет требуемая плоскость.



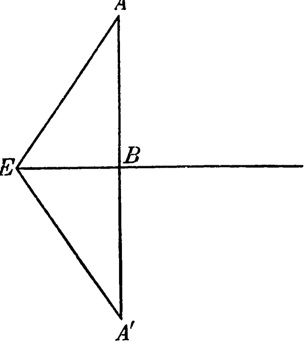
Черт. 1.

[29] Неясно, для чего понадобился второй перпендикуляр. Достаточно из какой-либо точки данной прямой опустить перпендикуляр на данную плоскость; требуемая плоскость проходит через данную прямую и этот перпендикуляр. Это тем более существенно, что при построении, предлагаемом Лобачевским, нужно еще доказать, что два перпендикуляра к данной плоскости сами расположены в одной плоскости.

Следующее за этим построение вызывает еще большие сомнения, так как неясно, ка́к в данной плоскости провести перпендикуляр к пересекающей ее прямой; вряд ли это возможно сделать без построения, указанного выше.

[30] На все эти «построения» следует, собственно, смотреть только как на доказательство существования соответствующих перпендикуляров или перпендикулярных плоскостей.

[31] Обычные доказательства этого предложения распадаются на два типа: а) установив предварительно теорему о внешнем угле и соотношения между сторонами и углами треугольника, основывают доказательство на том, что катет меньше гипотенузы (немецкая система: Кестнер, Вольф); б) продолжив перпендикуляр AB за точку B на расстояние $BA' = BA$ (черт. 2), основывают доказательство на том, что прямая AA' короче ломаной AEA' (французская система: Лежандр, Безу).



Черт. 2.

Лобачевский, повидимому, считал свое доказательство более наглядным. Но со стороны строго логической оно дефектно: если предложения о перпендикуляре и наклонных доказаны, то, основываясь на них, можно доказать, что внутренние точки хорды лежат внутри круга. Лобачевский же опирается на это предложение, не доказав его предварительно.

Глава IV. Измерение телесных углов. О правильных многогранниках и телах

Это — очень важная глава, которую Лобачевский позже в «Новых началах геометрии с полной теорией параллельных» полностью воспроизводит и развивает [1]). Основные свойства телесных (трехгранных и многогранных) углов изоморфны свойствам сферических треугольников и многоугольников — Лобачевский рассматривает их совместно и даже определяет телесный угол как вырезаемую им часть поверхности шара, центр которого совпадает с вершиной угла. Соотношения сферической геометрии (и сферической тригонометрии, которую Лобачевский в этом сочинении не рассматривает) носят абсолютный характер и прямо переходят в соотношения плоскости Лобачевского — это важнейший факт, который Лобачевский отмечает во всех своих сочинениях по «воображаемой геометрии».

Введя основные понятия, связанные с телесными углами, Лобачевский сначала доказывает равенство «вершинных» (т. е. вертикальных) телесных углов при помощи разбиения их на соответственно конгруэнтные части, а затем выводит для них своеобразно выраженную теорему о том, что площадь сферического многоугольника пропорциональна его угловому избытку: «величина телесного угла будет $\frac{1}{2}\cdot\{$сумма плоскостных углов — $(n-2)\,200^\circ\}$» [2]). Эта теорема позже перейдет в известное соотношение геометрии Лобачевского о пропорциональности площади прямолинейного треугольника и его углового дефекта [3]).

Во второй половине главы Лобачевский рассматривает правильные многоугольники и правильные многогранники, ограничиваясь только теми их свойствами, которые не зависят от постулата о параллельных линиях. Это сделано с большим искусством; доказательство того, что число правильных многогранников не превышает пяти, основанное на теореме Эйлера о многогранниках, является наиболее оригинальным во всем сочинении. Лобачевский повторяет его в сочинениях «О началах геометрии» и «Новые начала геометрии с полной теорией параллельных» [4]).

[32] Таким образом, Лобачевский называет телесным углом многогранный угол, выраженный в градусах, — он остается и здесь верным

---

[1]) Н. И. Лобачевский, Полн. собр. соч., т. II, стр. 227—251.

[2]) Множитель $\frac{1}{2}$ в этой формуле получается в результате своеобразно выбранной единицы для измерения телесного угла. См. об этом примечание [32].

[3]) См. «Пангеометрия», стр. 183 этой книги.

[4]) Н. И. Лобачевский, Полн. собр. соч., т. I, стр. 192—193 и т. II, стр. 238.

своей метрической (численной) точке зрения на угол. Но устанавливаемый им метод численного выражения угла расходится с тем, который принят в настоящее время; именно: телесный угол выражается у Лобачевского как здесь, так и в последующих его сочинениях [1], вдвое меньшим числом, чем это имеет место в современной литературе. Причины такого расхождения следующие.

Согласно определению, данному в тексте, двугранный и телесный углы отождествляются с числом, выражающим в двугранных градусах ту часть сферы, которая вырезывается его гранями. С другой стороны, в гл. II двугранный («плоскостной», по Лобачевскому) угол с той же метрической точки зрения отождествляется со своим линейным углом. Чтобы это не вызвало расхождения, Лобачевский называет сферическим градусом часть сферы, вырезываемую на ней двугранным углом в один градус, ребро которого проходит через центр сферы. Располагающиеся вокруг одного и того же диаметра 400 двугранных градусов делят сферу на 400 равных частей; градус представляет собой, таким образом, 400-ю часть сферы. Лобачевский называет сферическим градусом всякую часть сферы, имеющую ту же площадь, и измеряет телесный угол площадью вырезываемой им части сферы, выраженной в этих градусах. Трижды ортогональный угол октанта содержит поэтому 50°. Если прямой угол измерять в радианах, то он выразится числом $\frac{\pi}{2}$, вся сфера — числом 2π, а октант — числом $\frac{\pi}{4}$. Между тем, если измерять поверхность шара единичного радиуса (в один сантиметр) в единицах площади (в квадратных сантиметрах), то она выразится числом 4π. В настоящее время телёсный угол измеряют площадью, вырезываемой им на единичной сфере, и выражают эту площадь в квадратных метрах; это дает для телесного угла вдвое большее численное значение; октант выражается числом $\frac{\pi}{2}$. Иначе говоря, в настоящее время двугранные углы не относят к числу телесных углов и измеряют их так же, как это делал Лобачевский, линейным углом, телесные же углы измеряют площадью вырезываемой ими части сферы единичного радиуса, выраженной в квадратных единицах.

[33] В связи с заключительным предложением предыдущей главы нет необходимости повторять то же рассуждение. Перпендикуляр CE представляет кратчайшее расстояние центра от секущей плоскости, а потому его основание E упадет внутрь шара.

---

[1]) См. Н. И. Лобачевский, О началах геометрии. Полн. собр. соч., т. I, стр. 192; Новые начала геометрии с полной теорией параллельных, там же, т. II, стр. 204.

[34] Иными словами, многогранный телесный угол, вершина которого совпадает с центром сферы, вырезывает сферический многоугольник, сторонами которого служат дуги больших кругов.

[35] Под термином «равны» Лобачевский никогда не разумеет *конгруэнтности*; для этого он пользуется термином «одинаковы». В согласии с определением телесного угла доказываемое предложение выражает, что вертикальные телесные углы вырезывают на сфере равновеликие сферические многоугольники.

[36] Разъясняем это доказательство. Так как углы ACB и $A'CD'$ равны, то мы приведем их в совмещение таким образом, чтобы прямая CA совпала с CA', а CB с CD'. Тогда CD и CB' расположатся по одну сторону совмещаемых граней. Вследствие равенства двугранных углов при ребрах CA и CA' плоскость CAD упадет на плоскость $CA'B'$, а по равенству углов ACD и $A'CB'$ прямая CD совместится с CB'; это влечет за собой совмещение трехгранных углов.

Связки CA, CB, CD и CA', CB', CD' *противонаправлены* (одна—правосторонняя, другая — левосторонняя). Вследствие равенства углов BCA, DCA, $B'CA'$ и $D'CA'$ возможно совмещение *сонаправленных* связок CA, CD, CB с CA', CB', CD'.

В рукописи Лобачевского при изложении этого доказательства допущены описки, искажающие смысл[1]). Здесь текст исправлен.

[37] Таким образом, ABC есть сферический треугольник, вырезываемый трехгранным углом на сфере.

[38] Для обозначения телесных углов Лобачевский вводит особый знак Y или ⅄, пользуясь в рукописи тем и другим начертанием безразлично; для обозначения двугранных углов в трехгранном Лобачевский также пользуется знаком особого начертания 4.

[39] И эта формула отличается от обычной множителем $\frac{1}{2}$ по причинам, выясненным в примечании [32].

[40] Для равенства треугольников CBD и ABD, строго говоря, достаточно, чтобы стороны AB и BC были равны. Равенство углов нужно только, чтобы показать, что все три расстояния равны.

Дальнейшее доказательство проводится при помощи наложения. То обстоятельство, что учение о равенстве треугольников отодвинуто до гл. V, заставляет автора неоднократно производить наложение

---

1) См. Н. И. Лобачевский, Полн. собр. соч., т. II, сноска на стр. 60.

там, где без него можно было бы обойтись, не только не усложняя, но даже упрощая изложение.

[41] В тексте приведено только доказательство того, что число правильных многогранников не превышает пяти. Доказательства того, что эти пять тел действительно существуют, т. е. что в перечисленных случаях правильные многоугольники смыкаются и действительно образуют правильный многогранник, Лобачевский не дает ни здесь, ни в других сочинениях.

Доказательство того, что число правильных многогранников не превышает пяти, составляет не только главный результат, но, повидимому, и главную цель настоящей главы. Своеобразное изложение, которое Лобачевский дает этому предмету, требует пояснения.

Учение о правильных многогранниках (может быть, не вполне правильно называемых часто *платоновыми телами*) систематически проведено в XIII книге «Начал» Евклида. Здесь дано построение всех правильных многогранников, вернее, дано своеобразное доказательство существования каждого из них; по своеобразной классификации иррациональностей, установленной в X книге, определены стороны каждого правильного многогранника через радиус описанной сферы. В конце предложения 18 в виде особого приложения изложено доказательство того, что, кроме установленных пяти тел, других правильных многогранников не существует. То же доказательство последнего предложения изложено Лежандром в общем приложении к VI и VII книгам его «Начал». Это хорошо известное доказательство основано на том, что сумма плоских углов многогранного угла не может превысить $4d$. В евклидовой геометрии угол при вершине правильного треугольника составляет $\frac{2}{3}d$, в четырехугольнике d, в пятиугольнике $\frac{6}{5}d$, а при большем числе сторон внутренний угол еще больше. Поэтому при вершине правильного многогранника может сходиться не больше пяти правильных треугольников, не больше трех квадратов и не больше трех правильных пятиугольников; из правильных же шестиугольников уже нельзя составить даже трехгранного угла.

Но в неевклидовой геометрии (точнее, в геометрии Лобачевского) угол правильного многоугольника отнюдь не определяется числом его сторон. Можно, например, построить равносторонний треугольник со сколь угодно малым углом при вершине; поэтому можно составить многогранный угол с любым числом правильных треугольных граней. Доказательство Евклида, таким образом, непригодно для гиперболического пространства. Между тем теорема о том, что в пространстве существует только пять правильных многогранников (при

конечном числе граней), справедлива и в гиперболическом пространстве. Лобачевский уже в «Геометрии» явно стремится освободить доказательство каждого предложения от рассуждений, свойственных собственно евклидовой геометрии (т. е. зависящих от постулата о параллельных линиях), если это по существу дела возможно (т. е. в современной терминологии, если это предложение остается справедливым и в неевклидовой геометрии). Отсюда — своеобразное доказательство этого предложения, основанное на теореме Эйлера о зависимости между числом граней, ребер и вершин выпуклого многогранника. Соотношению, устанавливаемому этим путем для правильного многогранника, Лобачевский придавал большое значение [1]).

Глава V. Об одинаковости треугольников

Глава о равенстве треугольников — последняя, принадлежащая к абсолютной геометрии.

Кроме трех классических случаев равенства треугольников, Лобачевский формулирует и доказывает еще и четвертый: «Два треугольника одинаковы, когда у них две стороны равны и угол против большей из равных сторон». Это — обобщение теоремы о равенстве прямоугольных треугольников по гипотенузе и катету, необходимой для дальнейшего.

Глава заканчивается важным замечанием о том, что тремя углами треугольник еще не определяется. Последняя фраза главы:

> «Некоторые Математики невозможность определения линий помощию углов хотели принять за основание геометрии, но такое основание недостаточно, потому что разнородные количие [т. е. величины] могут быть в зависимости друг от друга»

особенно характерна для взглядов Лобачевского в 1823 году [2]); эта мысль Лобачевского, выраженная еще в «Обозрении 1»:

> «Итак, не надобно следовать тем, которые хотели допустить в основании начало подобия, разнородности линий с углами. . .» [3])

говорит о том, что в это время Лобачевский углубленно занимался теорией параллельных линий и, возможно, владел уже основами воображаемой геометрии.

[42] Как уже было указано в примечании [35], под «одинаковыми» Лобачевский разумеет конгруэнтные фигуры, а под «равными» —

---

1) См. Н. И. Лобачевский, О началах геометрии. Полн. собр. соч., т. I, стр. 193 и Новые начала геометрии с полной теорией параллельных, там же, т. II, стр. 237—239.

2) См. ниже, примечание [45].

3) Модзалевский, стр. 205.

равновеликие. Самая равновеликость, по мнению Лобачевского, заключается в том, что равновеликие фигуры равносоставлены, т. е. состоят из конгруэнтных, но различно расположенных частей. Это неправильно: не всякие равновеликие фигуры равносоставлены [1]).

[43] Вслед за этим Лобачевский доказывает, что это не может иметь места. Он пользуется при этом другим чертежом (черт. 18), на котором обозначения вершин не согласованы с их обозначениями на черт. 17. На следующий абзац нужно поэтому смотреть как на доказательство того, что сумма двух углов треугольника не может быть равна $2d$.

[44] Если луч BA образует с BD тупой угол, а DE образует с BD прямой угол (черт. 3), то они с этой стороны прямой встретиться не могут, потому что перпендикуляр BA' не встретит DE, а луч BA расположен по другую сторону BA'. Вообще некоторая тяжеловесность этих рассуждений объясняется явно выраженным стремлением избежать теоремы о внешнем угле треугольника.

Черт. 3.

[45] Термин «коликое» Лобачевский употребляет в том значении, в котором в настоящее время обыкновенно употребляется термин «величина».

Заключительное замечание главы V обнаруживает, что мысли, ведшие к неевклидовой геометрии, уже глубоко занимали Лобачевского в пору составления «Геометрии». При попытках доказать постулат о параллельных линиях от противного многие геометры приходили к зависимости между прямолинейными отрезками и соответствующими им углами. Эта зависимость между отрезком и углом представлялась невозможной. Лежандр после продолжительных попыток дать доказательство постулата о параллельных линиях пришел к заключению, что такое доказательство можно основать только на том, что разнородные величины — угол и отрезок — не могут быть связаны функциональной зависимостью. Это утверждение часто называли в литературе «принципом однородности». Мы видим, что Лобачевский в 1823 году был уже свободен от этого рода сомнений: «разнородные коликие могут быть в зависимости друг от друга» [2]).

---

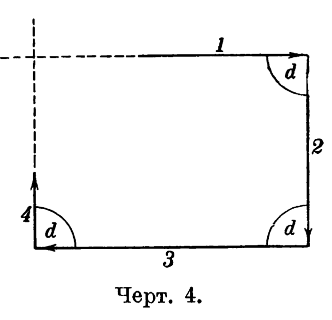
[1]) Об этом см. В. Ф. Каган, О преобразовании многогранников, изд. 2-е, М. — Л., 1933. В этой брошюре изложены история и сущность вопроса.

[2]) Подробнее о принципе однородности и об этом утверждении Лобачевского см. заключительную часть примечания [173] к сочинению «Геометрические исследования» (стр. 299—301).

Глава VI. О измерении прямоугольников

Предыдущими главами исчерпан весь тот содержащийся в «Геометрии» материал, который не зависит от постулата о параллельных линиях. С этой главы начинается собственно евклидова геометрия.

Лобачевский вводит постулат о параллельных линиях в так называемой *лежандровой форме* и, основываясь на нем, доказывает следующую теорему, справедливую только в евклидовом пространстве: если провести ломаную линию, составленную из четырех последовательно перпендикулярных звеньев, закручивающихся в одну сторону (черт. 4), то первые и последние звенья, может быть после их продления, должны обязательно пересечься. Эта теорема имеет для Лобачевского большое значение; он применяет ее еще раз в главе IX при изучении параллельных плоскостей (см. стр. 58). Лобачевский пытался в 1817 году дать ее доказательство, не опирающееся на евклидов постулат, но вскоре обнаружил свою ошибку [1]).



Черт. 4.

Далее доказывается, что полученное пересечение может происходить только под прямым углом, и этим установлено существование прямоугольника. Устанавливаются некоторые свойства прямоугольника, в том числе возможность разбить его на равные прямоугольники двумя сериями прямых линий; отсюда обычным способом выводится теорема об отношении площадей двух прямоугольников и после введения единицы меры площади — формула для «величины прямоугольника».

[46] *Измерением плоскостей* Лобачевский называет измерение площадей плоских фигур.

Линии *сходятся*, т. е. прямые линии пересекаются. Лобачевский часто называет прямые линии просто линиями. Слово *сходятся* он применяет исключительно к прямым линиям; о линиях вообще он говорит, что они *пересекаются* (см. стр. 33).

Термин «сходящиеся прямые» имеет основное значение в неевклидовой геометрии как противопоставление несходящимся прямым, которые в свою очередь подразделяются на параллельные и расходящиеся. В сочинении «О началах геометрии» Лобачевский пишет:

---

1) См. «Записки Темникова», стр. 383 этой книги.

«Итак все линии на плоскости в отношении к одной могут быть разделены на *сходящиеся* и *несходящиеся*. Последние будут называться *паралелльными*, если они представят границу, или, иначе сказать, переход от одних к другим между всеми выходящими из одной точки» [1]).

Есть основания предполагать, что своеобразный термин «сходятся» применен в «Геометрии» не случайно.

[47] В основе учения об измерении площадей многоугольников лежит понятие о прямоугольнике и об основных его свойствах. Самое существование прямоугольника нельзя провести, не прибегая к постулату о параллельных линиях. Лобачевский поэтому и начинает главу этим постулатом. Он дает ему выражение, которое часто называют лежандровой формой постулата о параллельных линиях: *если одна из двух прямых, лежащих в одной плоскости, перпендикулярна к секущей, а другая образует с ней острый угол, то прямые пересекаются со стороны острого угла* [2]).

Дальше Лобачевский приводит доказательство этого постулата, которое он сам называет «только пояснением», но не «в полном смысле математическим доказательством». Существенно отметить, что в своем «Обозрении 1», относящемся к 1822—1823 году, Лобачевский проводит ту же мысль:

«Другого рода трудность в Геометрии представляет параллелизм линий, трудность до сих пор непобедимую, но между тем заключающую в себе истины ощутительные, вне всякого сомнения и столь важные для целой науки, что никак не могут быть обойдены. Итак, остается только все сии истины привести к одной такой, которая могла бы легко убеждать в ее справедливости, присоединяя сюда некоторые пояснения, несмотря на недостаток строгости» [3]).

Из всех многочисленных «пояснений» пятого постулата Евклида, хорошо известных Лобачевскому [4]), он предпочитает доказательство,

---

[1]) Н. И. Лобачевский, Полн. собр. соч., т. I, стр. 194—195.

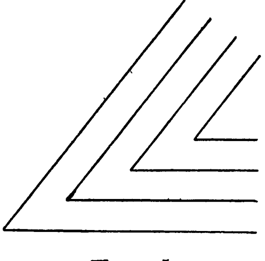
[2]) Приписывание этой формулировки Лежандру неправильно, потому что ею, по существу, пользуется уже арабский математик Насирэддин ат-Туси (1201—1274), а также Бертран, «доказательство» которого приводит Лобачевский.

[3]) Модзалевский, стр. 205.

[4]) В том же «Обозрении 1» Лобачевский перечисляет основные направления неправильных доказательств постулата: «Итак, не надобно следовать тем, которые хотели допустить в основание начало подобия, разнородности линий с углами, того менее тем, которые думают, что бесконечность подлежит человеческому суждению» (там же).

предложенное женевским математиком XVIII в. Л. Бертраном [1]) в несколько своеобразном изложении. Это доказательство, действительно, ценили многие геометры. Ошибка его выяснена в следующем примечании.

[48] Слабая сторона этого рассуждения, лишающая его доказательной силы, заключается в том, что ни вся плоскость, ни часть ее, содержащаяся между сторонами угла, не могут быть рассматриваемы как определенные величины, допускающие точное количественное сравнение. В евклидовой геометрии каждый угол может быть последовательно бесчисленное множество раз помещен внутри самого себя (черт. 5). Рассуждая как Бертран, мы могли бы придти к заключению, что содержащаяся между сторонами угла площадь составляет сколь угодно малую часть себя самой.



Черт. 5.

Неосновательность этого доказательства была совершенно ясна Лобачевскому еще в 1822 году. Но наглядная образность соображений Бертрана встретила внимание у многих серьезных математиков того времени. Крелль еще в 1835 году поместил в своем журнале модификацию этого доказательства [2]).

[49] Это предложение имеет место только в евклидовой геометрии. Следует заметить, что еще в 1817 году в своих лекциях по элементарной геометрии [3]) Лобачевский пытался обойтись совсем без введения нового постулата и обосновать евклидову геометрию также исходя из цепи последовательных перпендикуляров, закручивающихся в одну сторону; после четвертого перпендикуляра цепь замыкалась. Доказательство Лобачевского содержало ошибку очень трудно уловимую, в особенности если не иметь представления о неевклидовой геометрии. Тем не менее Лобачевский уже к 1822 году освободился от этой ошибки. Об этом обстоятельно изложено в статье Б. Л. Лаптева «Теория параллельных линий в ранних работах Лобачевского» [4]).

---

[1]) L. Bertrand, Développement nouveau de la partie élémentaire des mathématiques, Genève, 1778; Éléments de géométrie, Paris, 1812.

[2]) A. L. Crelle, Théorie des parallèles, Journal für die reine und angewandte Mathematik, **11**, Berlin, 1835.

[3]) См. «Записки Темникова», стр. 383 этой книги.

[4]) «Историко-математические исследования», вып. IV, М. — Л., 1951, стр. 201—220.

[50] Эти пересечения прямо следуют из установленного предложения: прямая AG перпендикулярна к AB, а прямая BD наклонена к BA под острым углом; точно так же CF образует с BC прямой угол, а BD — острый.

[51] На основании того же предложения: перпендикуляр AB и наклонная FC к AF встретятся со стороны острого угла, т. е. со стороны, где лежит прямая BC («на стороне BC» по выражению Лобачевского).

[52] «Содержанием» Лобачевский называет отношение.

Случая несоизмеримости Лобачевский по общей своей установке не рассматривает (см. примечание [11]).

Глава VII. О измерении треугольников и других фигур

Получив в конце предыдущей главы площадь прямоугольника, Лобачевский дает здесь площадь треугольника (сначала прямоугольного, а затем и произвольного), указывает на алгебраический и геометрический путь для нахождения площади произвольного многоугольника и заканчивает двумя частными случаями — «прямой трапецией» (трапецией с двумя прямыми углами) и параллелограммом.

В обычном изложении сначала из площади прямоугольника выводится площадь параллелограмма, а из последней — площадь треугольника. Лобачевский идет обратным, очень характерным для него путем. Остроугольный и тупоугольный треугольники он рассматривает как сумму и соответственно разность двух прямоугольных треугольников; параллелограмм же определяется необычно, без понятия о параллельных линиях (которые будут введены только в следующей главе):

> «*Параллелограмм* называется четыреугольник, составленный из двух одинаковых треугольников, соединенных так, что их равные стороны противоположны».

Это определение особенно естественно именно в настоящей главе, посвященной площадям прямоугольников. Существенно, что, даже перейдя в область собственно евклидовой геометрии, Лобачевский старается ввести понятие о параллельных линиях как можно позже: он сначала хочет исчерпать всё, что подлежит измерению, что обозримо в конечных пределах.

[53] Эта фраза обнаруживает, что мы имеем здесь дело с записками по читаемому курсу (см. вводное примечание на стр. 221).

[54] Вернее — тригонометрии.

[55] Нужно сказать, что это построение изложено нечетко: неясно, какая сторона должна быть «общей с многоугольником». Речь идет о диагонали, которая производит отделение и расположена внутри многоугольника.

Следующая фраза показывает, что Лобачевский в своих лекциях не останавливается на второстепенных подробностях, ограничиваясь важнейшими фактами элементарной геометрии. На это не обратил внимания академик Фусс в своем отрицательном отзыве на «Геометрию» [1]).

[56] Точнее: a перпендикулярна к c, а c перпендикулярна к b.

[57] В оригинальном тексте Лобачевского здесь, очевидно по недосмотру, вместо площади параллелограмма дано снова выражение для площади треугольника. Этот недосмотр остался и в Полном собрании сочинений Лобачевского.

Глава VIII. О параллелограммах

Дав в конце предыдущей главы своеобразное определение параллелограмма, не опирающееся на понятие о параллельных линиях, Лобачевский переходит теперь к свойствам параллелограмма в евклидовом пространстве. Для установления этих свойств ему нужно было развернуть теорию параллельных линий и учение о сумме углов в треугольнике и четырехугольнике. Сообразно этому настоящая глава распадается на три части: первая содержит учение о параллельных линиях, вторая излагает свойства параллелограммов, третья устанавливает предложения о сумме углов треугольника и четырехугольника.

[58] Это предложение, эквивалентное пятому постулату Евклида, чаще всего приводится в учебниках элементарной геометрии в качестве аксиомы. Его приписывают английскому математику Плэйферу [2]) не совсем правильно, потому что эта формулировка встречается у других авторов раньше, например у Насирэддина.

[59] В этом доказательстве есть недоговоренность. Дано, что $\angle BAC + \angle DCA = 200^\circ$. Требуется доказать, что $AB \| CD$. Разделив отрезок AC в точке E пополам, автор опускает из E на AB перпендикуляр EF («только EF перпендикулярна к AB»). Но остается еще показать, что этот перпендикуляр пересечет также DC. Действительно, если бы FG не пересекала DC, то через F проходили бы две прямые, параллельные к DC, что невозможно.

---

[1]) См. стр. 389 этой книги.

[2]) J. Playfair, Elements of geometry, containing the first six books of Euclid, Edinbourgh, 1797.

[60] «Проходит чрез середину» — Лобачевский имеет здесь в виду только то, что точка D падает *внутрь* основания BC.

[61] Своеобразное доказательство теоремы о сумме углов треугольника аналогично соответствующим рассуждениям Лежандра (см. очерк В. Ф. Кагана «Учение о параллельных линиях до открытия неевклидовой геометрии» [1])).

Глава IX. Об измерении призм

Первая часть главы содержит необходимые сведения о параллельных плоскостях. Затем дается определение призмы и устанавливаются основные свойства призм. После этого Лобачевский переходит к измерению призм, т. е. к нахождению их объема.

Прежде всего доказываются две теоремы об отношении призм. Первая теорема: объемы двух призм с конгруэнтными основаниями и одинаково направленными боковыми ребрами относятся как их высоты. Вторая теорема: две прямые призмы с равными высотами и прямоугольными основаниями относятся как их основания.

На основании этих теорем Лобачевский, установив единицу измерения — куб, находит последовательно объемы призм: сначала прямой, у которой основание — прямоугольник, прямоугольный треугольник и косоугольный треугольник, затем — наклонной, у которой основание — параллелограмм, треугольник и произвольный многоугольник, даже не обязательно выпуклый. Интересно, что в последней части рассуждения Лобачевский фактически рассматривает площади ориентированных треугольников, снабжая их знаками «+» и «—».

Этой главой заканчивается вторая часть сочинения, посвященная измерению фигур и тел, производимому «конечными» операциями — без интегрирования.

[62] Все, что было сказано до сих пор о параллельных плоскостях, не зависит от постулата о параллельных линиях — принадлежит абсолютной геометрии. Но дальнейшее утверждение: «...следовательно, p перпендикулярна к a и b» принадлежит уже собственно евклидовой геометрии, так как опирается на первое предложение предыдущей главы: «если из точки на линии опустится перпендикуляр на параллельную с ней, то он будет вместе перпендикуляром и для другой» [2]). Это последнее предложение выводится Лобачевским сразу из принятого им постулата в главе VI.

---

[1]) В. Ф. Каган, Лобачевский и его геометрия, М., 1955, стр. 54 и след.
[2]) Стр. 68.

[63] См. главу IV, стр. 58 и примечание [49]. Эта теорема играет у Лобачевского основную роль в теории параллельных линий и в ее приложениях.

[64] Существование призм обосновано предыдущими предложениями.

[65] Очень обычная в математической литературе неточность, проскальзывающая именно от того, что доказательство по своей очевидности опускается. Под термином «одинаковы» Лобачевский всегда понимает только *конгруэнтность* фигур или тел, т. е. их совпадение при наложении. Две плоские фигуры будут «одинаковы» и в том случае, когда они симметричны, так как их можно совместить, перевернув одну из них на другую сторону. Но симметричные пространственные тела совместить невозможно. Поэтому высказанное здесь предложение должно быть выражено следующим образом: если основания двух призм одинаковы и две соответствующие боковые грани («бока») одинаковы и одинаково наклонены к основанию с той же стороны, то призмы одинаковы или симметричны.

Непонятно, почему Лобачевский присоединил еще добавочное условие о равенстве высот (уже вытекающее из предпосланных условий).

[66] Это неверно; неправильная формулировка предыдущего предложения сопровождается здесь уже прямо ошибочным утверждением. Оно справедливо только в том случае, когда параллелепипед прямой; в случае наклонного параллелепипеда получаются две равновеликие, но не равные, а симметричные призмы. Утверждение было бы справедливо, если считать конгруэнтными также симметричные тела. В этом неправильном виде теорема формулирована еще Евклидом (предложение 28 книги XI), и Лобачевский воспроизводит, по существу, доказательство Евклида.

[67] В этом именно заключении, основанном на предыдущей неправильно выраженной теореме, и коренится ошибка, выясненная в предыдущем примечании.

[68] «Содержатся» — т. е. относятся.

Предложение неправильно формулировано. Если основания двух призм равны и если две соответственные грани равны и одинаково наклонены к основанию, то высоты не могут быть различны. В действительности Лобачевский предполагает, что призмы имеют одинаковые основания, что две боковые грани, прилежащие к равным сторонам основания, одинаково наклонены к основанию и имеют у соответствующих вершин основания равные углы, иначе говоря, эти две боковые грани являются параллелограммами с соответственно

равными углами и одной парой равных сторон (см. черт. 39 текста Лобачевского). Доказательство опирается, правда, на предыдущее предложение, но в таких условиях, при которых оно действительно справедливо.

[69] В главе IV *куб* определялся как правильный шестигранник. Это определение носит абсолютный характер. В настоящей главе следовало бы установить, что все грани куба — квадраты. Это, конечно, нетрудно сделать.

[70] Может, конечно, случиться, что все четыре перпендикуляра упадут вне призмы. Лобачевский этот случай ниже предусматривает.

[71] См. стр. 62—63.

[72] *На окружности* — т. е. на периферии (см. примечание [10]).

Глава X. Измерение пирамид и всех тел, ограниченных плоскостями

Основная часть этой главы посвящена вычислению объема «прямой трехсторонней пирамиды», т. е. треугольной пирамиды, в которой одно боковое ребро совпадает с высотой. В начале главы, после основных определений, Лобачевский указывает, что нахождение объема любой пирамиды сводится к объему прямой трехсторонней, а в конце, после получения формулы объема пирамиды, он сводит объем произвольного многогранника к сумме или разности объемов пирамид.

Теорему о том, что объем прямой трехсторонней пирамиды равен одной трети произведения площади основания на высоту, Лобачевский доказывает способом, отличным как от способа Евклида, так и от способа Лежандра: он прямо вычисляет этот объем как предел суммы вписанных призм, т. е. находит его интегрированием. Сравнение способов Евклида, Лежандра и Лобачевского дано в примечании [74]. Здесь мы отметим только, что Лобачевский особенно ценил этот способ, ведущий начало еще от Архимеда, и писал о нем в своем «Обозрении 1»:

> «Для измерения пирамид надобно прибегать к способу пределов, как единственному, соединяющему в себе ясность и строгость» [1]).

Этот способ Лобачевский впоследствии широко применил и в «воображаемой геометрии», и при его помощи ему удалось найти много определенных интегралов [2]).

---

1) М о д з а л е в с к и й, стр. 206.

2) См. об этом ниже, в сочинении «Пангеометрия».

[73] Определение пирамиды было дано еще в начале сочинения — в конце второй главы (стр. 38).

[74] Это определение прямой пирамиды расходится с современной терминологией.

[75] Требуется знать величину только прямой трехсторонней пирамиды; Лобачевский этим именно и пользуется.

[76] Этот момент — сравнение трехгранной призмы с параллелепипедом, — по существу, представляет собой введение так называемых *выходящих призм*.

[77] Классическое изложение учения об измерении пирамиды ведет свое начало от Евклида. Предложение 4 книги XII «Начал» устанавливает, что треугольная пирамида может быть разбита на две равновеликие призмы и на две равные пирамиды таким образом, что суммы объемов обеих составляющих пирамид меньше половины объема исходной пирамиды. На черт. 45 текста Лобачевского эти призмы — *EFGIKC*, *HEIAFK*, а пирамиды — *DFEG*, *EHBI*. По сравнению с рассуждением, содержащимся в тексте Лобачевского, это предложение содержит, таким образом, добавочную часть, которая заключается в том, что сумма входящих в разбиение двух пирамид меньше половины объема всей пирамиды.

В последующих предложениях Евклид производит такое же разбиение каждой из составляющих пирамид, далее — такое же разбиение каждой из четырех образовавшихся пирамид и т. д. Смысл всего построения Евклида заключается в том, что сумма объемов всех остаточных пирамид стремится к нулю, а потому объем исходной пирамиды можно рассматривать как предел всех последовательно построенных призм.

Это разбиение Евклид применяет в предложении 5 книги XII для доказательства теоремы, что объемы треугольных пирамид, имеющих одну и ту же высоту, относятся как площади оснований. Самое доказательство заключается в том, что в каждой из двух пирамид производится установленное в предложении 4 разбиение; соответствующие друг другу в двух пирамидах составляющие призмы имеют одну и ту же высоту, а потому относятся как площади их оснований или же как площади оснований исходных пирамид. Таким образом, и сумма объемов составляющих призм одной и другой пирамиды сохраняет постоянное отношение, равное отношению оснований исходных пирамид. В современной терминологии вывод заключается в том, что то же постоянное отношение имеют и пределы сумм составляющих призм, т. е. объемы двух исходных пирамид. Не располагая предложениями современной теории пределов, Евклид доказывает

ту же теорему рассуждением от противного, как это часто делается и в настоящее время в элементарных учебниках.

В частности, из этого предложения вытекает, что треугольные пирамиды, имеющие равновеликие основания и равные высоты, равновелики. Основываясь на этом, Евклид путем разбиения треугольной призмы доказывает, что объем треугольной пирамиды составляет третью часть треугольной призмы, имеющей то же основание и ту же высоту.

Лежандр упростил рассуждения Евклида. Он останавливается на более простом случае, когда треугольные пирамиды имеют равновеликие основания и равные высоты. Он разбивает каждую пирамиду на n усеченных пирамид с равными высотами и в каждой усеченной пирамиде строит так называемые входящую и выходящую призмы. Сравнивая входящие призмы с выходящими, он рассматривает объем пирамиды как общий предел суммы входящих или выходящих призм. Так как соответственные призмы двух пирамид при этом построении равновелики, то равны и суммы их объемов, а вместе с тем равны и пределы этих сумм, т. е. объемы двух пирамид. В дальнейшем Лежандр следует Евклиду. Схема Лежандра вошла почти без изменения, можно сказать, во все позднейшие учебники геометрии.

Лобачевский производит разбиение, точно следуя Евклиду. Его черт. 45 совпадает с рисунком, приложенным к предложению 5 книги XII «Начал» Евклида. Он разбивает данную пирамиду на две равновеликие призмы и на две равные пирамиды и подобно Евклиду повторяет эту операцию неограниченное число раз. Но рассматривая объем данной треугольной пирамиды как предел суммы объемов призм разбиения, он эту сумму непосредственно вычисляет и находит ее предел. Лобачевский фактически выполняет интегрирование. Схема Лежандра, по которой, можно сказать, в XIX в. все учились геометрии, представляет лишь незначительную модификацию системы Евклида. Схема Лобачевского по духу совпадает с методами Архимеда. Того же метода для разыскания длин, площадей и объемов Лобачевский придерживается во всех дальнейших главах. Они несут на себе печать рассуждений Архимеда.

Присоединим еще одно замечание. Метод пределов для доказательства равновеликости пирамид, имеющих равновеликие основания и равные высоты, неизбежен потому, что равновеликие многогранники, как правило, не могут быть составлены из равных частей[1]). Поэтому определение Лобачевского (см. начало главы V) равных (по современной терминологии равновеликих) фигур, как составленных из одинаковых (конгруэнтных) частей, неправильно.

---

[1]) См. В. Ф. Каган, О преобразовании многогранников, 2-е изд., М. — Л., 1933.

Глава XI. Измерение окружности круга и площади круга

Лобачевский начинает главу общими соображениями о длине кривой линии, площади плоской фигуры, ограниченной кривой линией, и площади кривой поверхности. Он дает вполне современные определения этих понятий, вытекающие из способа вычисления этих величин, применяемого на практике — «в действительном измерении». В своем «Обозрении 1» эти соображения Лобачевского изложены более обстоятельно:

> «Величина кривой линии в отношении к прямой не может быть понимаема так, как мы понимаем величину прямых линий в отношении друг к другу; но что мешает согласно с практикою разуметь под длиною кривой линии сумму тех прямых, которые будут поставлены вместо частей кривой линии с тем условием, чтоб почитать сию сумму за длину кривой линии, тем строже определенную, чем части кривой будут взяты менее? Такое измерение не могло бы ни к чему служить как в теории, так и в практике, если б с уменьшением частей кривой длина ее не подходила постепенно ближе и ближе к известной границе, которая и должна быть почтена за истинную длину; не потому однако ж, чтоб кривая линия допускала понятие о длине ее, но потому, что действительное измерение должно как можно более приближаться к сей границе»[1]).

Затем Лобачевский подготовляет необходимый материал для вычисления периметра правильного многоугольника, вписанного в круг, дает необходимые сведения о подобных треугольниках и выводит теорему Пифагора. С ее помощью получается формула для длины стороны вписанного 2^{n+1}-угольника и приближенное выражение числа π — отношения полуокружности к радиусу.

Получив формулу длины полуокружности, Лобачевский в заключительной части главы доказывает, что найденное им выражение для π, а следовательно, и длина окружности имеют пределы. Для этого он переходит к площади круга, которую определяет как общий предел площадей правильных вписанного и описанного многоугольников. Следует отметить, что эта часть главы содержит недоговоренность и даже ошибки, впрочем легко устранимые. Об этом сказано в соответствующих примечаниях.

Метод интегрирования, введенный Лобачевским еще в предыдущей главе, применяется им и в этой и в обеих последующих главах.

[78] «Как было уже сказано» относится к стр. 34. Это введение, устанавливающее самое понятие длины кривой линии, площади

---

[1]) Модзалевский, стр. 205—206.

плоской фигуры («плоскости», по терминологии Лобачевского), площади ограниченной поверхности и объема тела, ограниченного кривой поверхностью, представляет собой развитие идеи, получившей уже выражение в главе I (см. примечание [13]).

[79] Точнее — границу, к которой приближается величина вписанной ломаной линии, площадь вписанной фигуры или поверхности, объем вписанного тела.

[80] Этот абзац формулирован с такой точностью, что он без существенных изменений мог бы найти место в современном курсе анализа. Можно сказать, что содержащиеся в этом абзаце формулировки, несомненно, стояли впереди эпохи.

[81] Лобачевский имеет в виду теорему Пифагора, которую он ниже доказывает. Для этого он предварительно дает необходимые сведения о подобии треугольников. По общей своей установке Лобачевский излагает учение о подобии треугольников там, где в этом уже ощущается действительная нужда. Некоторые теоремы теории подобия могли бы быть уже полезны и раньше, например в предыдущей главе при разбиении пирамиды. Но общим соображениям о подобии треугольников Лобачевский дает место там, где без них обойтись уже невозможно.

[82] Случая несоизмеримости Лобачевский нигде не рассматривает. См. об этом примечание [11].

[83] Следуя своей выдержанной метрической точке зрения на геометрию, Лобачевский, в противоположность Евклиду, дает теорему Пифагора только в ее чисто метрической форме, как численное соотношение между длинами гипотенузы и катетов прямоугольного треугольника.

Доказательство теоремы Пифагора изложено очень сжато, и к нему могут быть отнесены слова Лобачевского, сказанные в главе VII (стр. 63):

> «Все это должно быть моим слушателям давно известно, почему и оставляю дальнейшие подробности».

[84] В этом и следующих равенствах перед левой частью подразумеваются слова: «хорда дуги»; так, например:

$$\text{хорда дуги } \frac{200^\circ}{2^2} = r \cdot \sqrt{2 - \sqrt{2}}\,.$$

[85] Эта формула дает длину стороны правильного 2^{n+1}-угольника, вписанного в окружность радиуса r; умножая ее на 2^n, Лобачевский получает выражение для полупериметра этого многоугольника:

$$r \cdot 2^n \underbrace{\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots}}}}}_{n \text{ двоек}} .$$

Последнее выражение есть, по Лобачевскому, длина полуокружности радиуса r «тем вернее, чем n возвысится более», множитель при r обозначается через π. Ниже Лобачевский доказывает существование предела, к которому стремится указанный периметр (см. следующее примечание).

[86] Лобачевский хочет доказать, что полученное им выражение для числа π имеет предел; это равносильно тому, что длина полупериметра правильного вписанного многоугольника стремится к определенному пределу при неограниченном уменьшении числа сторон.

Замысел Лобачевского состоит в следующем. Разность площадей правильных одноименных вписанного и описанного многоугольников стремится к нулю; следовательно, каждая из этих площадей стремится к некоторому пределу. Площадь правильного вписанного n-угольника Лобачевский принимает равной $2^{n-1} cr$ (c — длина стороны); ее предел существует, а следовательно, существует предел выражения $2^{n-1}c$, т. е. πr. Установлено существование предела — числа π — и одновременно получено выражение для площади круга.

В доказательстве Лобачевского имеются два дефекта. Во-первых, площадь правильного вписанного многоугольника равна не $2^{n-1}cr$, а $2^{n-1}cp$, где p — апофема многоугольника; во-вторых, Лобачевский не доказал, что разность площадей описанного и вписанного многоугольников стремится к нулю. Точное доказательство на этом пути возможно, но оно потребовало бы несколько более обстоятельных рассуждений.

[87] Это неверно; нужно $K > 2^{n-1} cp$ (см. предыдущее примечание).

[88] Это остается недоказанным.

Глава XII. Об измерении объема цилиндра и конуса, поверхностей прямого цилиндра и прямого конуса

Глава состоит из двух одинаково построенных частей: первая из них посвящена цилиндру, а вторая — конусу.

После своеобразного определения каждого тела находится сначала его объем (при этом тело может быть и наклонным), а затем

боковая поверхность (только для случая прямого тела). Известные формулы получаются предельным переходом в соответствующих формулах для вписанных призмы и пирамиды.

Сохранился отрывок из рукописи Лобачевского, относящийся, вероятно, к 1819 году. Он содержит начало главы «О измерении поверхностей тел» [1]). Приводим начало этого отрывка, из которого видно, что к своей точке зрения на измерение кривых поверхностей Лобачевский пришел еще задолго до написания «Геометрии»:

> «Здесь займемся рассмотрением поверхностей прямого цилиндра, прямого конуса и шара. Понятие о величине поверхности так же произвольно, как и понятие длины кривой линии. Согласно с измерением длины кривых линий мы будем измерять поверхность, рассекая ее плоскостями на весьма малые части и принимая сии части за прямые плоскости, проходящие через те же точки пересечения и ограниченные пересекающимися плоскостями; сумму сих прямых плоскостей [2]) будем почитать за поверхность тела, а разность суммы с суммой касательных плоскостей к поверхности, ограниченных теми же пересекающимися плоскостями, показывает нам, как далеко простирается такая ошибка. Здесь должно следовать доказывать, что как первая, так и вторая суммы имеют границы, и что разность их может быть мала как угодно».

Далее в отрывке вычисляются этим методом поверхности цилиндра и конуса.

[89] Эта фраза носит описательный характер: из определения призмы, данного в главе IX, прямо не вытекает, что «цилиндр есть призма». Для того чтобы связать между собой определения призмы и цилиндра, следовало бы начать с определения цилиндра и не только кругового, но это выходит за пределы элементарной геометрии.

[90] «Как мы видели» относится к предыдущей главе.

Глава XIII. О величине объема и поверхности шара

В первой половине главы вычисляются объемы шара и части шара, заключенной между двумя плоскостями: диаметральной и ей параллельной; Лобачевский находит эти объемы элементарным вычис-

---

[1]) Сочинение „Основание геометрии“ (см. стр. 384 настоящего издания). Приводимый отрывок опубликован в виде приложения к статье И. Н. Бронштейна «К истории „Обозрений преподавания чистой математики“ Н. И. Лобачевского», Историко-математические исследования, вып. III, стр. 192—193.

[2]) То-есть их площадей.

лением определенных интегралов $2\pi\int\limits_0^r(r^2-x^2)\,dx$ и $\pi\int\limits_0^h(r^2-x^2)\,dx$, пользуясь известной формулой для суммы квадратов первых натуральных чисел. Вычитая значение последней величины из объема половины шара, он получает объем шарового сегмента («отрезок шара»), а прибавив к нему объем конуса, — объем шарового сегмента («конический вырезок шара»).

При этом Лобачевский обращает внимание на интересный факт: разность объемов двух секторов, образованных проведением двух параллельных плоскостей, не зависит от положения этих плоскостей, а только от расстояния между ними.

Вторая половина главы посвящена вычислению поверхности шара. Фактически Лобачевский прибегает здесь к двойному интегрированию: параллельными и меридиональными сечениями поверхность шара разбивается на элементы — сферические прямоугольники; вершины каждого из них лежат в одной плоскости и поэтому прямоугольник может быть заменен трапецией с теми же вершинами. Это проводится в соответствии с общей установкой Лобачевского на вычисление площадей кривых поверхностей, которая была формулирована им еще в рукописи 1819 года[1]). Первое интегрирование проводится вдоль параллели и дает поверхность элементарного усеченного конуса, а второе — вдоль меридиана.

В заключительном абзаце Лобачевский дает другой способ вычисления поверхности шара, опирающийся на найденный выше объем шара. Вписывая в шар многогранник с бесконечно малыми гранями s, он рассматривает его объем как сумму пирамид. Объем каждой из них равен $\frac{1}{3}s(r-p)$, где p — бесконечно малая величина (разность между радиусом шара и высотой элементарной пирамиды). При $p\to 0$ эта сумма стремится к $\frac{1}{3}Sr=\frac{4}{3}\pi r^3$, где S — поверхность шара; отсюда находится ее величина.

В этих двух приемах вычисления поверхности шара проявилась тенденция Лобачевского производить интегральные вычисления одной и той же величины различными способами, Она дала позже плодотворные результаты при использовании воображаемой геометрии для вычисления определенных интегралов.

[[91]] Цилиндры, которые Лобачевский строит, как это видно на черт. 52 его текста, выходят за пределы половины шара, а потому сумма их превышает объем половины шара. Если построить также входящие цилиндры, то каждый из них равен следующему за ним

---

[1]) См. предыдущую страницу.

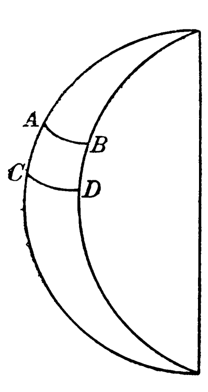
выходящему цилиндру. Поэтому сумма объемов входящих цилиндров, которая меньше объема половины шара, равна сумме объемов всех выходящих цилиндров без первого.

[92] Эти значения вставляются в формулу, выражающую сумму выходящих. цилиндров; полученное выражение представляет собой не значение объема шара, а верхнее приближение к нему, соответствующее делению радиуса на n равных частей.

[93] Известная формула для суммы квадратов первых $n-1$ целых чисел доказана здесь методом полной индукции. Она без труда выводится и прямым способом: в тождестве $(\nu+1)^3-\nu^3=3\nu^2+3\nu+1$ положим $\nu=0, 1, \ldots, n-1$ и сложим почленно полученные равенства; получится несложное уравнение относительно искомой суммы, которое и дает указанное выражение.

[94] Произведенное здесь вычисление есть не что иное, как элементарное вычисление определенного интеграла $\pi\int\limits_0^r(r^2-x^2)\,dx$, выражающего объем полушария.

[95] Изложенное в этом абзаце рассуждение не отличается полной ясностью. Лобачевский разделяет сферу на части меридиональными плоскостями, а эти последние — на сферические четырехугольники вида $ABCD$ (черт. 6). Точки A, B, C, D лежат в плоскости; берем, таким образом, *плоский* четырехугольник $ABCD$. Поверхность шара рассматривается как предел суммы площадей этих плоских четырехугольников, т. е. поверхностив писанного в сферу многогранного тела. Вычислить эту поверхность — задача сложная. Но если смещать меридиональные сечения, то многогранная поверхность, содержащаяся между двумя параллелями, приближается к поверхности усеченного конуса, содержащегося между этими двумя параллелями. Эту поверхность Лобачевский в дальнейшем и вычисляет. Утверждение, что она «будет истинною величиною сей части поверхности шара», конечно, неточно.



Черт. 6.

[96] Точнее — расстояние между теми точками одной и другой окружности, которые лежат на одном меридиональном сечении (см. черт. 53 текста Лобачевского).

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ИССЛЕДОВАНИЯ ПО ТЕОРИИ ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ ЛИНИЙ

«Геометрические исследования по теории параллельных линий» представляют собой элементарное изложение начал неевклидовой геометрии, созданной Лобачевским (так называемой «гиперболической геометрии» или «геометрии Лобачевского»). Это небольшое сочинение написано с удивительным искусством. За сто с лишним лет, истекших со времени опубликования «Геометрических исследований», идеи Лобачевского многообразно перекристаллизовывались в умах многочисленных геометров, размышлявших над этими вопросами. Многие выводы в настоящее время упрощены и изменены, некоторые концепции иначе оформлены; но синтетическое изложение начал неевклидовой геометрии этого типа и по настоящее время сохранило общую схему «Геометрических исследований», подобно тому как построение начал обыкновенной геометрии по сие время носит на себе отпечаток схемы Евклида. «Геометрические исследования» представляют собой перл геометрического творчества и навсегда останутся образцом изложения своеобразных новых идей в элементарной форме. По «Геометрическим исследованиям» с неевклидовой геометрией впервые познакомились математики конца шестидесятых и начала семидесятых годов прошлого столетия.

Написанные Лобачевским после других основных его сочинений «Геометрические исследования» представляют собой лучшее введение во все эти сочинения. Гаусс, познакомившись с этой брошюрой Лобачевского, писал о ней своему другу Шумахеру в 1846 г.: «Это сочинение выполнено Лобачевским мастерски в истинно геометрическом духе. Я считаю себя обязанным обратить Ваше внимание на это сочинение, которое наверное доставит Вам совершенно исключительное наслаждение».

По содержанию «Геометрические исследования» можно разбить на четыре части.

Первую часть составляют вступление и глава I, содержащая перечень важнейших предложений, не зависящих от постулата о параллельных линиях; одни из этих предложений можно

рассматривать как постулаты, другие — как теоремы, устанавливаемые без помощи V постулата Евклида. Этот перечень, конечно, не охватывает всех предложений так называемой «абсолютной геометрии», т. е. того геометрического материала, который не зависит от постулата о параллельных линиях. Лобачевский ограничивается теми, которые ему наиболее необходимы для дальнейшего своеобразного развития геометрии. Нужно, однако, отметить, что этот перечень не исчерпывает и тех предложений, на которые автор фактически опирается в дальнейшем тексте сочинения.

Вторую часть составляют главы II—V, содержащие предложения 16—25. Они содержат изложение теории параллельных линий в новом определении этого основного понятия. Здесь устанавливаются две гипотезы, одна из которых ведет к евклидовой (по Лобачевскому — «употребительной») геометрии, другая — к «воображаемой». В связи с этим устанавливается понятие об угле параллельности [функция $\Pi(x)$] и о связанной с этим зависимости между суммой углов треугольника и постулатом о параллельных линиях.

Третью часть составляют главы VI—VIII (предложения 26—34). После необходимых подготовительных предложений (свойства сферических треугольников, справедливые как в евклидовой, так и в неевклидовой геометрии и важное вспомогательное предложение 28) здесь устанавливаются понятия о предельной линии и предельной поверхности и доказывается основная теорема, что геометрия предельной поверхности формально совпадает с евклидовой планиметрией.

Четвертую часть составляют главы IX—XI — предложения 35—37; они содержат неевклидову тригонометрию и вывод основного соотношения:

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2} \Pi(x) = e^{-x}.$$

Из этого краткого обзора мы видим, что «Геометрические исследования» не охватывают всей элементарной геометрии так называемого гиперболического пространства. Мы не находим здесь даже развернутого учения о расположении прямых и плоскостей; нет вывода длины окружности, площади круга, нет даже учения о площадях прямолинейных фигур, отличающегося такой простотой. В заключительных абзацах Лобачевский отсылает для ознакомления с этими вопросами к другим своим сочинениям [1]).

Цель этого сочинения совершенно ясна: Лобачевский хочет дать такое введение в «воображаемую геометрию», которое сделало бы

---

[1]) Некоторые из этих вопросов рассмотрены в сочинении «Пангеометрия», помещенном в эту книгу, но там они изложены не простейшим способом.

внимательному читателю доступным изучение остальных, более глубоких, труднее изложенных его сочинений. И эта цель была достигнута Лобачевским.

Совершенно несомненно, что и в настоящее время изучение сочинений Лобачевского по неевклидовой геометрии в подлиннике наиболее целесообразно начинать с «Геометрических исследований»: это— ключ к остальным его сочинениям.

Вступление

Вступление начинается указанием на «несовершенства в геометрии», из-за которых она со времен Евклида осталась «в летаргическом состоянии», по образному выражению Яноша Больаи [1]). Эти несовершенства — неясность первых понятий, дефекты метрики и пробел в теории параллельных линий — Лобачевский ясно видел еще в 1822 году; в своем «Обозрении 1» он пишет о трудностях, еще не преодоленных в геометрии:

> «Трудность различать составленные понятия от приобретенных» [т. е. выводимых человеком от взятых из природы] ... «до сих пор еще не побеждена в Геометрии» [2]).
>
> «В курсах геометрии встречаются темноты, которых причина... что не следуют правилу определять всё в мере... и что хотят сохранить идеальность, тогда как истинная цель геометрии этого не требует» [3]).
>
> «Другого рода трудность в Геометрии представляет параллелизм линий, трудность до сих пор непобедимую» [4]).

Вторая трудность — несовершенство метрики — была Лобачевским преодолена еще в «Обозрении 1», и на изложенных в нем основных положениях Лобачевский построил свой учебник «Геометрия», исходя из понятия об измерении величин. Это было сделано с такой строгостью, которая может удовлетворить и современного математика.

Решение первой задачи — построение начал геометрии на твердых основаниях — Лобачевский наметил в «Обозрении 2» (1824) и выполнял в своих основных сочинениях: «О началах геометрии», и, с наибольшей полнотой, в «Новых началах геометрии». Конечно, современного математика удовлетворить это построение не может:

---

[1]) См. В. Ф. Каган, Лобачевский и его геометрия, М., 1955, стр. 179.

[2]) «Обозрение 1», Модзалевский, стр. 204.

[3]) Там же, стр. 205.

[4]) Там же.

теперь в основание геометрии положены иные принципы, чем у Лобачевского, но эти принципы могли быть установлены только в результате его великого открытия [1]). Наконец, «непобедимая трудность» проблемы параллельных линий была Лобачевским побеждена в его «Кратком изложении основ геометрии» в начале 1826 года; основными положениями «воображаемой геометрии» Лобачевский владел еще раньше [2]).

[97] Исследования Лежандра по теории параллельных линий подробно изложены в статьях В. Ф. Кагана «Учение о параллельных линиях до открытия неевклидовой геометрии» [3]) и «Исследования Лежандра по теории параллельных линий» [4]). Лобачевский дал критику этих исследований во «Вступлении» к своему сочинению «Новые начала геометрии с полной теорией параллельных» [5]).

[98] Сочинение «О началах геометрии» помещено в I томе Полного собрания сочинений Лобачевского на стр. 185—261; сочинение «Новые начала геометрии с полной теорией параллельных» — во II томе на стр. 147—454. Годы опубликования этих сочинений указаны Лобачевским не точно: первое было напечатано в 1829 и 1830 годах, второе — в 1835, 1836, 1837 и 1838 годах.

[99] Лобачевский говорит о статье Лежандра, опубликованной в 1833 году в «Мемуарах Парижской академии» [6]). В этой обширной статье Лежандр изложил все свои соображения по теории параллельных линий. Лобачевский ссылается на стр. 372 статьи Лежандра.

---

1) Лобачевский хотел дать строгое обоснование геометрии, исходя только из явно выраженных определений. Хотя по уровню строгости Лобачевский превосходил своих современников (особенно в сочинении «Новые начала геометрии»), эту попытку нельзя признать удавшейся: Лобачевский опирается на ряд невысказанных положений. Выдержанным с логической точки зрения является современный *аксиоматический метод* обоснования геометрии и всякой дедуктивной науки (см. об этом статью «Аксиома» в первом томе Большой Советской Энциклопедии, стр. 613). Элементарные изложения неевклидовой геометрии Лобачевского аксиоматическим методом имеются в книгах: Б. Н. Делоне, Краткое изложение доказательства непротиворечивости планиметрии Лобачевского, М. — Л., 1953 и А. П. Норден, Элементарное введение в геометрию Лобачевского, М. — Л., 1953.

2) Стр. 388 этой книги.

3) В. Ф. Каган, Лобачевский и его геометрия, М., 1955, стр. 21.

4) Вступительная статья в книге: Н. И. Лобачевский, Геометрические исследования по теории параллельных линий, М. — Л., 1945, стр. 23—34.

5) Н. И. Лобачевский, Полн. собр. соч., т. II, стр. 149—152 и 158—162.

6) A. M. Legendre, Réflexions sur différentes manières de démontrer la théorie des parallèles ou le théorème sur la somme des trois angles du triangle, Mémoires de l'Académie des Sciences, Paris, 1833, XII, стр. 367—410.

I. Предварительные предложения

Первые 15 предложений «Геометрических исследований» носят различный характер. Первое из них может считаться определением прямой линии [1]); другие могут быть рассматриваемы как постулаты или аксиомы (например, предложения 2, 3, 5); наконец, остальные суть теоремы, обычно доказываемые в курсах геометрии. Лобачевский приводит их как материал, которым он может пользоваться при развитии своей геометрической системы, не рискуя впасть в ложный круг — воспользоваться положением, независимость которого он имеет в виду обнаружить. Однако в этот перечень вошли далеко не все предложения, не зависящие от постулата о параллельных линиях; более того, Лобачевский в дальнейшем изложении и сам пользуется предложениями, не вошедшими в этот перечень, например аксиомами Паша и Дедекинда; об этом будет указано в примечаниях к соответствующему тексту.

[100] В своих предыдущих сочинениях по геометрии Лобачевский дает более точное определение прямой линии. Так, в «Геометрии» «прямыми линиями называются те, которые сливаются, как скоро у них две общие точки, и которые не могут не сливаться при двух общих точках» [2]). В сочинениях «О началах геометрии» и «Новые начала геометрии с полной теорией параллельных» определения совпадают: «Прямой называется та линия, которая между двух точек покрывает сама себя во всех положениях» [3]).

После определения Лобачевский дает разъяснение, в котором говорится о вращении *поверхности*. Вероятнее всего упоминание «поверхности» (по существу излишнее) имеет своим происхождением сферу, диаметр которой является прямой линией. В «Новых началах геометрии с полной теорией параллельных» сразу после приведенного определения прямой говорится: «Это свойство принадлежит поперечнику круга», а выше круг был определен как сечение сферы плоскостью. На это указывает весь текст статьи 25 «Новых начал», в которой дано определение прямой линии.

[101] Евклид дает этому положению такое выражение: «Две прямые не могут заключать пространства». Это положение встречается в «Началах» в виде аргументации при доказательстве предложения 4 книги I.

---

1) Об определении прямой линии см. примечание [8] к сочинению «Геометрия».

2) См. стр. 34 этой книги.

3) Н. И. Лобачевский, Полн. собр. соч., т. I, стр. 191; т. II, стр. 187.

Некоторые комментаторы извлекли его из этого рассуждения и включили в число аксиом. Как Гейберг и Менге, так и Гис [1]) изъяли это положение из числа аксиом как не подлинное.

[102] Под «ограниченной плоскостью» («begrenzte Ebene») Лобачевский разумеет часть плоскости, ограниченную непрерывной замкнутой кривой, «плоскую фигуру», как часто говорят теперь. Проходя через такую фигуру, неограниченная прямая должна из нее выйти и таким образом делит ее на две части.

Самое важное точно выраженное применение, которое это положение в дальнейшем получает, заключается в том, что *прямая, пересекая одну сторону треугольника и входя поэтому внутрь треугольника, должна из него выйти, а потому неизбежно пересекает и другую сторону треугольника*. Отнюдь не будет преувеличением сказать, что построение своеобразной теории параллельных линий Лобачевского опирается преимущественно на это положение (см., например, предложения 17 и 18 «Геометрических исследований»). Выделенный таким образом частный случай, которого несомненно достаточно, чтобы в дальнейшем (при правильном определении непрерывной замкнутой кривой) доказать общее предложение, в позднейшей литературе обыкновенно называют *аксиомой Паша*. Хотя на это положение, несомненно, опираются и гораздо более ранние авторы (Саккери, Лежандр), но в совершенно отчетливой форме оно действительно выражено впервые в сочинении Паша «Лекции по новой геометрии» [2]) ((IV. Grundsatz) в теории плоскости).

[103] Это — частный случай предложения 7 (см. примечание [105]).

[104] Точнее: прямолинейный отрезок, соединяющий точку, лежащую по одну сторону некоторой прямой, с точкой, лежащей по другую сторону той же прямой, пересекает эту прямую.

[105] Важное предложение абсолютной геометрии, т. е. той части элементарной геометрии, которая не зависит от V постулата Евклида. Оно составляет содержание предложения I.27 «Начал» Евклида; приводим его формулировку по Евклиду: *Если прямая, пересекая две [другие] прямые линии, образует с ними равные накрест лежащие углы, то эти прямые параллельны.*

[106] В оригинале «Congruent». Во всех своих сочинениях, написанных на русском языке, Лобачевский называет конгруэнтные фигуры

[1]) Новейшие издатели «Начал» Евклида.

[2]) M. Pasch, Vorlesungen über neuere Geometrie, Leipzig, 1882, стр. 21; новое издание с обширным предисловием Дена (M. Dehn) выпущено в 1926 году.

одинаковыми [1]). В настоящем переводе везде сохранен термин «конгруэнтны».

[107] В своих предыдущих сочинениях по геометрии Лобачевский определяет плоскость как «поверхность, где пересекаются равные сферы вокруг двух постоянных центров», а круг — как пересечение двух сфер с одним и тем же радиусом [2]). Отсюда сразу вытекает предложение 12.

[108] Это предложение формулировано не вполне точно: сферические треугольники при этих условиях либо конгруэнтны, либо симметричны.

II. Параллельные линии

Эта глава содержит три предложения.

Первое основное предложение 16 посвящено постулату Лобачевского, который он вводит в противовес постулату Евклида. Предложение 4 предыдущей главы гласило: две прямые, перпендикулярные к одной и той же третьей прямой, никогда не пересекаются, сколько бы мы их ни продолжали. Таким образом если в плоскости лежат прямая BC и точка A вне ее, то существует во всяком случае одна прямая в этой плоскости, проходящая через A и не пересекающаяся с BC, — это перпендикуляр EAE' к перпендикуляру AD, опущенному из точки A на BC (черт. 1 текста Лобачевского). Теперь можно поставить вопрос: существуют ли кроме EAE' еще прямые, проходящие через A и не встречающие BC?

Евклид вводит постулат (V постулат), что других таких прямых не существует. Лобачевский вводит противоположный постулат; он заканчивается словами:

> «*Не зная, есть ли перпендикуляр AE единственная прямая, которая не встречается с DC, будем считать возможным, что существуют и другие линии, например AG, которые не встречают DC, сколько бы мы их ни продолжали*».

В предложении 16 сделаны выводы, непосредственно вытекающие из этого постулата, и вводится соответствующая терминология. *Параллельной линией* по отношению к прямой BC называется не просто прямая, лежащая в данной плоскости и не пересекающая BC, — это

---

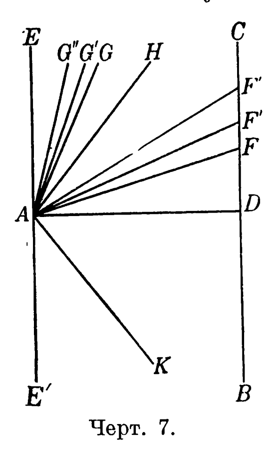
1) См., например, сочинение «Геометрия», стр. 52 этой книги.

2) Например, «Новые начала геометрии», ст. 18. Н. И. Лобачевский, Полн. собр. соч., стр. 181.

граничная прямая, первая из непересекающих прямых. Разъяснение этого положения сделано в примечании [109].

Этим начинается геометрия Лобачевского. Предложения 17 и 18 — первые две теоремы этой геометрии, первые свойства параллельных линий, далеко не очевидные, и очень искусно доказанные Лобачевским.

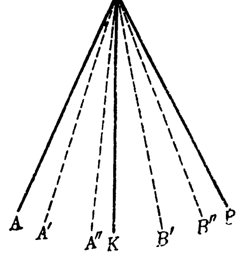
Независимо от Лобачевского неевклидова геометрия была открыта Гауссом и Больаи. Оба начинают построение геометрии в общем с того же постулата, что и Лобачевский, и с тех же теорем (в несколько иной модификации). Подробнее об этом см. в статье В. Ф. Кагана «Строение неевклидовой геометрии у Лобачевского, Гаусса и Больаи», § 6 [1]).



Черт. 7.

[109] Существование «граничной прямой» требует, конечно, доказательства. Оно основано на непрерывности пучка прямых или, лучше сказать, лучей, проходящих внутри угла EAD из его вершины A (черт. 7). При допущении, что, кроме AE, есть еще лучи, не встречающие DC, лучи этого пучка распадаются на две категории: лучи первой категории AF, AF', AF'', ... встречают луч DC, лучи второй категории AG, AG' AG'', ... его не встречают. При этом все лучи первой категории неизбежно расположены по одну сторону лучей второй категории, и обратно. В самом деле, если лучи AF и AF'' принадлежат первой категории, то никакой луч второй категории не может лежать между ними, ибо всякий луч AF', лежащий между двумя лучами AF и AF'', встречающими CD, также встречает CD (предложение 3 и к нему примечание [102]).

Таким образом, положение, что из точки A внутри прямого угла EAD выходит не один, а несколько (и вследствие этого — бесконечное множество) лучей, не встречающих CD, приводит к образованию дедекиндова сечения [2]) в пучке лучей, проходящих в угле EAD через его



Черт. 8.

---

[1]) В. Ф. Каган, Лобачевский и его геометрия, М., 1955, стр. 225—232.

[2]) *Принцип Дедекинда* (или *аксиома непрерывности*) для лучей, проходящих внутри некоторого ориентированного угла AOB (т. е. угла, внутри которого установлено направление, например от OA к OB) из его вершины O (черт. 8), состоит в следующем. *Если все лучи пучка разбиты на две категории так, что всякий луч первой категории* (OA', OA'' *и т. д.*) *предшествует всякому лучу второй категории* (OB', OB'' *и т. д.*), *то либо имеется последний луч первой категории, либо первый луч*

вершину. Вследствие этого по принципу Дедекинда в этом пучке необходимо существует *граничный луч*, представляющий собой либо последний луч в первой категории (последний луч, встречающий DC), либо первый луч второй категории (первый луч, не встречающий DC). Но последнего встречающего луча существовать не может; в самом деле, если AF есть встречающий луч, то, взяв на DC точки F', F'' за точкой F, мы получим дальнейшие лучи, встречающие DC. Следовательно, существует первый луч второй категории, т. е. первый (граничный) луч, не встречающий DC; это и есть луч AH, который Лобачевский называет *параллельным* DC.

Лобачевский в «Новых началах геометрии с полной теорией параллельных» называет лучи, встречающие DC *встречными* или *сводными*; лучи же не встречающие (кроме параллельного) — *невстречными* или *несводными* [1]).

Геометрия, построенная на всех постулатах Евклида, с заменой, однако, постулата о параллельных (V постулата) допущением, что в плоскости из точки, лежащей вне прямой, можно провести больше одной прямой, не встречающей данной, и есть *неевклидова геометрия Лобачевского*. Однако название «неевклидова геометрия» в настоящее время получила гораздо более широкое значение; но в примечаниях к настоящему сочинению мы под «неевклидовой геометрией» всегда разумеем геометрию Лобачевского; ее в настоящее время обычно называют также *гиперболической геометрией* (см. примечание [218]).

[110] Это обозначение основано на том, что угол параллельности в неевклидовой геометрии, как это будет ниже обнаружено, представляет собой функцию расстояния p.

[111] Этот небольшой абзац посвящен случаю евклидовой геометрии, а следующий — снова неевклидовой геометрии.

[112] Иными словами, прямая AH считается параллельной прямой BC в сторону DC, а прямая AK — параллельной той же прямой в сторону DB. Это получает еще более точное выражение, если говорить только о лучах, а не о прямых: *луч AH параллелен лучу BC* (черт. 1 текста Лобачевского), а *луч AK параллелен лучу CB*; вместе с тем через точку A, лежащую вне луча BC, во всяком случае (т. е.

второй категории. Этот граничный луч OK образует так называемое *дедекиндово сечение* пучка лучей.

Первоначально принцип Дедекинда был формулирован для действительных чисел (см., например, Г. М. Фихтенгольц, Курс дифференциального и интегрального исчисления, т. I, М. — Л., 1949, стр. 27). О принципе Дедекинда в геометрии см. А. П. Норден, Элементарное введение в геометрию Лобачевского, М. — Л., 1953, стр. 40—41.

1) Н. И. Лобачевский, Полн. собр. соч., т. II, стр. 266.

как в евклидовой, так и в неевклидовой геометрии) проходит один и только один параллельный ему луч AH. Лобачевский этой терминологией не пользуется: он всегда пишет «линия AH параллельна линии DC» или же «прямая AH параллельна прямой DC». Но это всегда нужно понимать в том смысле, что луч AH параллелен лучу DC.

[113] Строго говоря, этот именно признак непосредственно служит определением параллели. Луч AH параллелен DC, если он не встречает DC, между тем как *всякий* луч, проходящий внутри угла DAH, встречает DC. Существенно важной особенностью такого определения параллели является то обстоятельство, что оно носит *абсолютный* характер, т. е. пригодно как для неевклидовой, так и для евклидовой геометрии.

Заметим, что Лобачевский, в сущности, всегда опирается на это свойство параллели, которым она определяется.

[114] Содержащееся в предыдущем предложении определение параллели связывает ее с точкой, из которой она выходит: луч AB параллелен CD (черт. 2 текста Лобачевского), если он не встречает CD и в точке A отделяет лучи, пересекающие CD от непересекающих. Будет ли этот луч производить такое же отделение пересекающих лучей от непересекающих в другой своей точке, скажем, в точке E или E'? Этот именно вопрос получает разрешение в предложении 17.

[115] Должно встретить потому, что в точке A луч AB по условию отделяет встречающие лучи CD от невстречающих.

[116] На основании аксиомы Паша, вытекающей из предложения 3. См. примечание [102].

[117] Иначе говоря, лучи EB и $E'B$ в точках E, E' производят отделение пересекающих лучей от непересекающих, т. е. как луч EB, так и луч $E'B$ параллельны лучу CD.

[118] Дано, таким образом, что луч AB параллелен лучу CD; нужно доказать, что и луч CD параллелен AB. Так как луч CD не встречает AB, то остается только обнаружить, что всякий луч CE, проходящий внутри угла DCA, встретит AB. Это доказательство Лобачевский и проводит.

[119] Полоса $BAFE$ повернута вокруг точки A таким образом, что линия AF совпадает с линией AG, FE с GH, а AB с AK. Поэтому углы поворота FAC и BAK равны. Далее Лобачевский производит обратный поворот и возвращает отрезок AG в положение AF; тогда луч GL пойдет по FE, AL — по AB и точка L совпадает с точкой пересечения лучей AB ч CE.

III. Сумма внутренних углов прямолинейного треугольника

В этой главе Лобачевский рассматривает вопрос о сумме углов треугольника и прежде всего устанавливает два факта: 1) эта сумма не может быть больше π (предложение 19) и 2) если она равна π для какого-нибудь одного треугольника, то она равна π и для всякого треугольника (предложение 20). Предложение 21 носит вспомогательный характер, а предложение 22 устанавливает важную связь между V постулатом Евклида и суммой углов треугольника: если принять V постулат, то сумма углов треугольника равна π.

Последний результат был формулирован еще Евклидом в предложении I. 32 «Начал»; его открытие приписывают Фалесу Милетскому (VII—VI в. до н. э.). Первые два предложения имеют гораздо более позднее происхождение; впервые они были установлены Саккери в работе, опубликованной в 1733 году[1]). Работа Саккери оставалась неизвестной, и Лежандр независимо от Саккери доказал их в начале XIX в. при попытках изложить курс геометрии без введения специального постулата[2]).

Ни Саккери, ни Лежандр не сделали последнего решающего вывода из этих трех предложений. Его делает Лобачевский в заключительной части предложения 22:

> «Отсюда следует, что во всех прямолинейных треугольниках сумма трех углов либо равна π, и тогда угол параллельности $\Pi(p) = \frac{1}{2}\pi$ для любой линии p, либо во всех треугольниках эта сумма $< \pi$, и тогда также $\Pi(p) < \frac{1}{2}\pi$. Первое предположение служит основой обыкновенной геометрии и плоской тригонометрии. *Второе предположение также может быть допущено, не приводя ни к какому противоречию в результатах...*».

И Лобачевский развертывает эти результаты — свою воображаемую геометрию.

---

1) G. Saccheri, Euclides ab omni naevo vindicatus ..., Milano, 1733.

2) A. M. Legendre, Éléments de géométrie, Paris, 1-е изд., 1794; 12-е изд., 1823. В конце жизни Лежандр составил мемуар, объединивший все его попытки доказать постулат о параллельных линиях: Réflexions sur différentes manières de démontrer la théorie des parallèles ou le théorème sur la somme des trois angles du triangle («Размышления о различных способах доказать теорию параллельных линий или теорему о сумме углов треугольника»). Mémoires de l'Académie des Sciences, т. XII, Paris, 1833; в этом мемуаре впервые формулировано предложение 20 «Геометрических исследований» Лобачевского. Это предложение Лобачевский получил независимо от Лежандра: оно имеется еще в «Записках Темникова» от 1817 года (см. стр. 383 этой книги).

[120] Уточняем ход рассуждения Лобачевского. Обозначим наименьший угол первого (заданного) треугольника ABC через γ. Указанным построением мы переходим от первого треугольника ко второму ACE с той же суммой всех углов $\pi+\alpha$, но сумма двух углов второго треугольника равна γ; следовательно, его наименьший угол $<\frac{1}{2}\gamma$. От второго треугольника можно тем же способом перейти к третьему; сумма всех его углов останется равной $\pi+\alpha$, а наименьший угол будет $<\frac{1}{4}\gamma$. Это построение можно продолжать до тех пор, пока сумма двух углов треугольника не станет меньше α; тогда третий его угол будет больше π.

[121] Доказательство этой важной теоремы Лобачевский разбивает на ряд этапов. Он доказывает последовательно, что если существует хотя бы один треугольник, сумма углов которого равна π, то:

1) существует *прямоугольный* треугольник с такой же суммой углов;

2) существует *прямоугольник*, т. е. четырехугольник, все углы которого — прямые;

3) существует прямоугольник, стороны которого могут превзойти любые заданные размеры;

4) существует прямоугольный треугольник с суммой углов, равной π, катеты которого могут превзойти любые заданные размеры;

5) сумма углов любого прямоугольного треугольника равна π и, наконец,

6) сумма углов любого треугольника равна π.

[122] Так как угол BAC острый, то основание перпендикуляра, опущенного из точки B на сторону AC, должно в силу предыдущего предложения упасть на луч AC, а не на его продолжение; по той же причине оно должно упасть и на луч CA; основание перпендикуляра должно, следовательно, лежать *внутри* стороны AC. Треугольник разобьется поэтому на два составляющих треугольника.

Так как сумма внутренних углов треугольника ABC равна π, в составляющих же треугольниках к ним присоединяются еще два прямых угла, то сумма внутренних углов обоих составляющих треугольников составит 2π. Поскольку в силу предыдущего предложения ни в одном из двух составляющих треугольников сумма углов не может оказаться больше π, она должна быть в каждом из составляющих треугольников равна π.

Весь смысл этой части доказательства заключается в том, чтобы показать, что при существовании какого-либо треугольника, в котором сумма углов равна π всегда возможно построить *прямоугольный* треугольник, в котором сумма внутренних углов также равна π.

[123] Прикладывая к нему конгруэнтный ему треугольник гипотенузой к гипотенузе, но, повернув последнюю в обратную сторону так, чтобы точка C попала в B, а точка B — в C.

[124] Вновь по той причине, что ни в одном из этих двух треугольников сумма внутренних углов не может превысить π.

[125] Иначе говоря, располагая уже прямоугольным треугольником, в котором сумма углов равна π, можно при его помощи построить другой прямоугольный треугольник с той же суммой углов ($=\pi$), в котором катеты будут сколь угодно велики (соответственно больше любых двух заданных отрезков). Если поэтому возьмем произвольный прямоугольный треугольник ECF (черт. 7 текста Лобачевского), то можно будет построить такой прямоугольный треугольник BCD с суммой углов $=\pi$, в котором треугольник ECF займет положение, указанное на черт. 7 [1])

[126] Это будут прямоугольные треугольники BCD и ECD с общим катетом CD и прямоугольные треугольники ECD и ECF с общим катетом EC.

[127] Таким образом доказано, что при сделанном предположении в любом *прямоугольном* треугольнике сумма углов равна π.

[128] Если ABC (черт. 5 текста Лобачевского) есть совершенно произвольный треугольник, то мы разобьем его на два прямоугольных треугольника; в каждом из них сумма внутренних углов равна π, в обоих вместе $= 2\pi$; отбросив сумму двух прямых углов, образовавшихся при дополнительной вершине, придем к заключению, что и в исходном треугольнике ABC сумма углов равна π.

[129] Поскольку сумма внутренних углов треугольника не может превысить π, каждый из внешних углов треугольника не может быть меньше суммы двух внутренних углов, с ним не смежных; поэтому $\angle DAE + \angle DEA = 2\angle DEA \leqslant \alpha$.

[130] Лобачевский обозначает греческой буквой (α или β) величину, которую в настоящее время принято называть *дефектом* треугольника. Как установлено предложениями 19 и 20, могут быть только две возможности: либо сумма углов любого прямолинейного треугольника равна π, либо она меньше π. Разность между π и этой суммой и есть дефект треугольника; он будет, следовательно, или положительной величиной, или нулем. Ниже Лобачевский доказывает, что при

---

1) В тексте Лобачевского не согласованы обозначения вершин прямоугольника на черт. 6 и треугольника на черт. 7. В этой книге обозначения на черт. 6 и 7 приведены в соответствие.

соблюдении условия теоремы дефект треугольника равен нулю — в этом и состоит предложение 22.

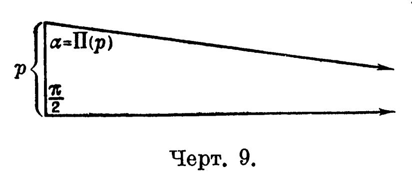
[131] Так как $\angle CAF = \frac{1}{2}\pi - a$, $\angle AFC = b$, то сумма углов прямоугольного треугольника ACF равна $\pi + b - a$, откуда и вытекает равенство $\alpha + \beta = a - b$.

[132] Так как по условию луч AB параллелен CD, то луч AF будет пересекать CD, сколь бы малым мы ни взяли угол a. Что касается угла b, то он может быть сделан сколь угодно малым согласно предложению 21. Таким образом в предыдущем равенстве $\alpha + \beta = a - b$ левая часть имеет постоянные неотрицательные слагаемые α и β; правая же часть бесконечно мала; отсюда вывод автора.

[133] С этого места Лобачевский, таким образом, твердо принимает второе возможное допущение, именно, что сумма углов треугольника меньше π, и в этом предположении развертывает все свои дальнейшие рассуждения. Это нужно постоянно помнить, следя за дальнейшим текстом.

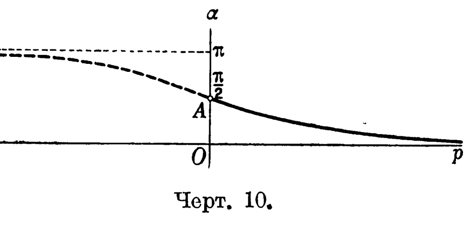
IV. Исследование угла параллельности

В первом же предложении неевклидовой геометрии — предложении 16 — Лобачевский ввел функцию $\Pi(p)$ — *угол параллельности*, соответствующий отрезку p. По определению, это — такой угол α, что если из концов отрезка p провести два луча, один из которых перпендикулярен к p, а другой образует с p острый угол α, и направить эти лучи так, чтобы они лежали в одной полуплоскости (черт. 9), то они будут параллельны друг другу (в смысле Лобачевского).



Черт. 9.

Позже, в главе X, эта функция будет определена — Лобачевский получит для нее аналитическое выражение. В главе IV, состоящей только из одного предложения 23, установлена только ее качественная характеристика: эта функция проходит через все значения от $\frac{\pi}{2}$ до 0, когда отрезок p растет от 0 до ∞; она непрерывна и монотонно убывает, ее график имеет вид сплошной кривой на черт. 10.



Черт. 10.

В заключительной части главы Лобачевский дает этой функции $\Pi(p)$ определение также и для нулевого и отрицательных значений p.

Определяя $\Pi(p)$ дополнительно формулами $\Pi(0)=\frac{\pi}{2}$ и $\Pi(-p)=\pi-\Pi(p)$, он дополняет график функции штриховой частью, симметричной к сплошной части относительно центра A. Теперь формулировка предложения 23 становится пригодной действительно для любого угла: острого, прямого и тупого.

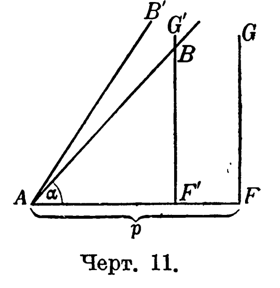
Функция $\Pi(p)$ войдет во все формулы тригонометрии для плоскости Лобачевского; поэтому ей уделяется такое внимание.

[134] Сумма углов треугольника, разбитого трансверсалью на два составляющих треугольника, всегда меньше, чем сумма углов любого из этих составляющих треугольников. Фактически это было уже обнаружено при доказательстве предложения 22. Там было показано, что в треугольнике ACF, разбитом трансверсалью AE на треугольник ACE с суммой углов $\pi-\alpha$ и треугольник AEF с суммой углов $\pi-\beta$, сумма внутренних углов равна $\pi-\alpha-\beta$. В случае, с которым мы здесь имеем дело, сумма углов треугольника $AA''B''$ поэтому меньше, чем в треугольнике $AA''B'$.

[135] Это доказывается так же, как и существование параллели (см. предложение 16 и к нему примечание [109]). Принимая это, Лобачевский обнаруживает, что луч FG действительно параллелен лучу AB, т. е. что всякий луч FH, проходящий внутри угла GFA, встречает AB.

[136] Это следует из того, что перпендикуляр KH, выходит из точки K, лежащей до основания первого, не встречающего AB перпендикуляра FG.

[137] Если, как на черт. 11, AF есть тот отрезок p, для которого $\Pi(p)=\alpha$ $(=\angle BAF)$, и мы возьмем $AF'<AF$, то луч AB будет встречать перпендикуляр $F'G'$, а потому луч AB', параллельный $F'G'$, будет проходить выше AB, т. е. при $AF'<AF$ имеем $\Pi(AF')>\Pi(AF)$. Итак, $\Pi(p)$ есть монотонная функция от p, убывающая с возрастанием p и, следовательно, возрастающая с убыванием p. Как было доказано выше, при этом возрастании функция $\Pi(p)$ должна проходить через все значения углов, меньших $\frac{1}{2}\pi$; поэтому $\Pi(p)$ стремится к $\frac{1}{2}\pi$, когда p стремится к нулю. И обратно, убывая с возрастанием p функция $\Pi(p)$ должна принимать любые сколь угодно малые значения; она стремится поэтому к нулю, когда p неограниченно возрастает.



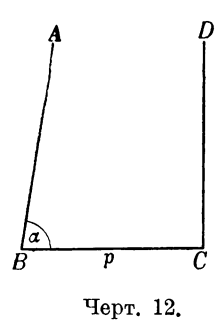
Черт. 11.

[138] Согласно изложенному выше, каждому положительному числу p (при установленной единице меры, в которой оно выражает

определенный отрезок) соответствует острый угол α, связанный с p соотношением

$$\Pi(p) = \alpha. \qquad (1)$$

Этот угол обращается в $\frac{1}{2}\pi$ при $p = 0$ и обратно, каждому углу α, не превышающему $\frac{1}{2}\pi$, соответствует отрезок, а вместе с тем и положительное число p, при котором имеет место соотношение (1). Если на стороне BC угла $ABC = \alpha$ отложим отрезок $BC = p$ (черт. 12), то перпендикуляр CD, восставленный к этой стороне угла из точки C, будет параллелен BA.



Черт. 12.

Если p есть отрицательное число, то функция $\Pi(-p)$ геометрически не установлена. С другой стороны, равенство (1) при наличных определениях не имеет содержания, если α есть тупой угол.

Теперь Лобачевский определяет функцию $\Pi(-p)$ (для отрицательного значения аргумента) соотношением

$$\Pi(-p) = \pi - \Pi(p). \qquad (2)$$

В силу этого соотношения каждому отрицательному числу $-p$ также соответствует угол α, для которого

$$\Pi(-p) = \alpha, \qquad (3)$$

но это будет угол тупой, $\pi - \Pi(p) > \frac{1}{2}\pi$. И обратно, если α есть тупой угол $\left(\frac{1}{2}\pi < \alpha < \pi\right)$, то ему всегда отвечает один и только один отрицательный аргумент $-p$, для которого имеет место соотношение (2): выбрав в этом случае p так, чтобы $\Pi(p) = \pi - \alpha$, получим то значение p, при котором соотношение (2) имеет место. При этих условиях в функции $\Pi(x)$ аргумент может изменяться от $-\infty$ до $+\infty$; значение же функции меняется от π до 0. Вместе с тем, каков бы ни был угол α в пределах от 0 до π, всегда найдется одно и только одно (положительное или отрицательное) значение x, при котором $\Pi(x) = \alpha$.

Геометрический смысл положительного значения аргумента p выяснен выше. Если α есть тупой угол (черт. 13) и при $p' = -p$ имеет место соотношение (2), то в силу определения (2) $\Pi(p) = \pi - p'$. Если поэтому теперь на *продолжении* стороны BC отложим отрезок $BC' = p$, то перпендикуляр $C'D'$ будет параллелен второй стороне угла. Определение (3) представляется поэтому вполне естественным.

Черт. 13.

V. Взаимное расположение параллельных линий

По своему содержанию эта глава является продолжением главы II «Параллельные линии» — в ней доказываются два свойства параллельных прямых в геометрии Лобачевского.

Первое свойство (предложение 24) указывает на характер взаимного расположения двух параллельных прямых. В евклидовой геометрии две параллельные линии находятся на всем их протяжении на одном и том же расстоянии друг от друга; это значит, что все перпендикуляры, опущенные из точек одной прямой на другую, ей параллельную, равны между собой. В геометрии же Лобачевского происходит совершенно иное: там эти перпендикуляры *сокращаются* при движении в сторону параллельности прямых. Ниже (в конце предложения 33) Лобачевский докажет, что эти перпендикуляры *неограниченно* сокращаются, т. е. две параллельные прямые асимптотически приближаются друг к другу.

Напротив, второе свойство (так называемая *транзитивность* параллелизма), имеющее место в евклидовой геометрии, дословно переносится и на геометрию Лобачевского: две прямые, параллельные третьей, параллельны между собой (предложение 25). Следует только иметь в виду, что в условиях неевклидовой геометрии формулировка предложения 25 требует уточнения (иначе она может оказаться неверной!); ее следует формулировать так: две прямые, параллельные третьей *в одну и ту же сторону*, параллельны между собой в эту же сторону [1]).

Глава заканчивается очень важным замечанием, значение которого выяснится в дальнейшем.

[139] Ссылку на предложение 22 нужно относить к концу его, где устанавливается, что в дальнейшем исследование будет производиться на основе допущения, что сумма углов треугольника меньше π, а потому сумма углов в четырехугольнике меньше 2π.

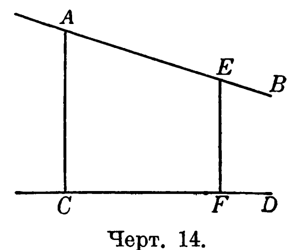
[140] Четырехугольник $ABDC$ принадлежит именно к тому типу, который рассматривал Саккери [2]). EF есть так называемая средняя линия этого четырехугольника; она перпендикулярна к обоим его основаниям.

---

1) Если две прямые параллельны третьей *в разных направлениях*, то они не обязательно параллельны друг другу. Так, например, две *пересекающиеся* прямые могут быть параллельны третьей, но они, очевидно, не параллельны между собой.

2) О четырехугольнике Саккери см. В. Ф. Каган, Лобачевский и его геометрия, М., 1955, стр. 159.

[141] Следующее доказательство того же предложения кажется несколько проще. Положим, что луч AB параллелен лучу CD (черт. 14).



Черт. 14.

Из точки E, лежащей от A в сторону параллельности, опустим на CD перпендикуляр EF. Так как $\angle BEF + \angle AEF = \pi$, а $\angle CAE + \angle AEF < \pi$, то $\angle BEF > \angle BAC$, т. е. $\Pi(EF) > \Pi(AC)$, а потому (предложение 23, заключительная часть) $EF < AC$.

Заметим, что в сторону параллельности расстояние одной параллели от другой убывает неограниченно; в противоположную же сторону (как говорит Лобачевский, «в сторону развода»), оно неограниченно возрастает.

[142] *Крайней* линией здесь названа прямая, лежащая вне полосы, ограничиваемой первыми двумя параллелями.

Обращаясь к доказательству этого предложения, нужно прежде всего заметить, что прямые AB и CD встретиться не могут, потому что из точки их пересечения, если бы таковая существовала, выходили бы два луча, параллельных EF, что не может иметь места (см. примечание [112]). Остается, таким образом, обнаружить, что AB есть граничный луч, не встречающий CD; это автор и выполняет.

[143] Угол DCE есть угол параллельности, соответствующий расстоянию CE, а потому он меньше прямого.

[144] Отсюда уже следует, что линии AB и EF не пересекаются: через общую их точку, если бы таковая существовала, необходимо проходила бы и прямая CD, потому что три прямые AB, CD и EF лежат попарно в одной плоскости; но это не может иметь места, так как линии AB и CD параллельны.

VI. Измерение трехгранных углов

Первые два предложения этой главы относятся к свойствам трехгранных углов и принадлежат абсолютной геометрии. Лобачевский рассматривал их еще в 1823 году в своем учебнике «Геометрия»; здесь он приводит для них те же доказательства [1]).

Предложение 26 является вспомогательным; оно необходимо Лобачевскому для замены площади сферического треугольника площадью треугольника, симметричного ему относительно центра сферы. Эту замену он будет проводить в следующем предложении.

Замечательное предложение 27 о том, что площадь сферического треугольника пропорциональна его «избытку», т. е. разности между

1) Ср. «Геометрия», гл. IV, стр. 46—48 этой книги.

суммой углов треугольника и двумя прямыми углами, имеет для Лобачевского очень большое значение по трем причинам.

Во-первых, оно не зависит от постулата о параллельных линиях. Позже, в предложении 35 Лобачевский установит, что абсолютный характер имеют и все соотношения сферической тригонометрии.

Во-вторых, это предложение имеет точный аналог для прямолинейных треугольников в плоскости Лобачевского: только там «избыток» будет заменен «дефектом» треугольника — разностью между π и суммой углов треугольника. В «Геометрических исследованиях» Лобачевский не рассматривает площадей плоских фигур и не приводит этой теоремы, но она появляется у него уже в первой опубликованной работе по неевклидовой геометрии — «О началах геометрии» [1]; другое доказательство этого дано в «Пангеометрии» [2].

Наконец, в-третьих, при помощи этого предложения Лобачевский доказывает следующее, основное для неевклидовой геометрии предложение 28 — о сумме двугранных углов в трехгранном угле, у которого вершина становится бесконечно далекой.

Это предложение 28 гласит: *если три плоскости пересекаются по параллельным линиям, то сумма образуемых ими трех двугранных углов равна двум прямым.* Оно играет в неевклидовой геометрии очень важную роль. После установления нового понятия о параллельности двух лучей (первого основного момента в неевклидовой геометрии) это предложение является вторым основным моментом в построении неевклидовой геометрии. Сущность дела заключается в том, что оно является *абсолютным*, т. е. справедливо как в евклидовой, так и в неевклидовой геометрии. Если прямые AA', BB', CC' параллельны в евклидовом пространстве, а плоскость ABC к ним перпендикулярна, то углы A, B, C треугольника ABC суть линейные углы двугранных углов (AA'), (BB'), (CC'), о которых идет речь. Сумма углов треугольника ABC равна π, а вместе с тем и сумма трех двугранных углов, которые образуются, когда три плоскости пересекаются по параллельным линиям AA', BB', CC' также равна π. В неевклидовой геометрии прежде всего нельзя провести плоскости, перпендикулярной к трем параллельным прямым. Сумма углов треугольника ABC, как бы мы ни выбрали точки A, B, C на параллелях, меньше π; но сумма двугранных углов (AA'), (BB') и (CC') здесь остается равной π. Значение этого факта выяснится в главе VIII.

[145] *Противолежащие треугольники* — это два сферических треугольника ABC и $A'B'C'$, вершины которых (A и A', B и B', C и C') являются диаметрально противоположными точками одной и той же

---

1) Н. И. Лобачевский, Полн. собр. соч., т. I, стр. 220.

2) См. стр. 183 этой книги.

сферы [1]). Доказательство равновеликости таких треугольников сводится к разбиению их на соответственно конгруэнтные части; более подробно оно изложено в сочинении «Геометрия» на стр. 46—47 этой книги.

[146] В оригинале сказано «Oberflächen» (поверхностей); в действительности здесь идет речь о равенстве площадей (т. е. о равновеликости) двух фигур. Во всех своих сочинениях Лобачевский называет две фигуры или два тела равными, когда они, по современной терминологии, равновелики. Напротив того, когда они конгруэнтны, он на немецком языке называет их «congruent», на русском — «одинаковыми» (см. примечание [106], а также сочинение «Геометрия», стр. 52 и примечание [42]). Поэтому следующее предложение Лобачевского нужно понимать так: *две фигуры равновелики, если они образуются составлением или отделением равновеликих частей.*

[147] Трехгранный угол, как и всякий телесный угол, измеряется площадью той части сферы единичного радиуса, которую он на ней вырезывает. Площадь сферического треугольника выражается числом $A+B+C-\pi$, где A, B, C суть углы треугольника. Сообразно этому предложение, о котором идет речь, должно было бы гласить: «трехгранный телесный угол равен сумме его двугранных углов без *двух прямых*». Расхождение вызвано тем, что Лобачевский пользуется вдвое большей единицей измерения площади на сфере, чем принятой в настоящее время; поэтому он выражает площадь сферы не числом 4π, а числом 2π в особого рода единицах. См. об этом примечание [32] к сочинению «Геометрия».

Это предложение было, конечно, хорошо известно до Лобачевского; как и предыдущее предложение, оно принадлежит абсолютной геометрии. Впервые оно было, повидимому, установлено в 1603 году англичанином Гаррио (Th. Harriot) и независимо открыто и опубликовано Жираром (Girard) в 1629 году [2]). Лобачевский мог бы на него непосредственно сослаться. Приведенные, однако, в тексте два доказательства имеют двоякую роль. Во-первых, Лобачевскому необходимо четко показать, что доказательство этого предложения не зависит от теории параллельных линий. Во-вторых, принадлежащее ему второе доказательство имеет то значение, что оно с несущественными

---

[1]) В оригинале: «gegenüberstehende Dreiecke». В сочинениях, написанных на русском языке, Лобачевский называет эти треугольники *вершинными*; см., например, «Геометрия», стр. 46 этой книги.

[2]) Подробные сведения об этом открытии можно найти в книге J. Tropfke, Geschichte der Elementar-Mathematik, Berlin u. Leipzig, 2-е изд., т. V, стр. 129—130.

изменениями может быть применено к разысканию площади прямолинейного треугольника в его неевклидовой геометрии [1]).

Первое доказательство предложения 27 имеется в «Геометрии» (стр. 47—48 этой книги) с теми же обозначениями (см. черт. 14 текста «Геометрии»).

[148] Треугольники P и X образуют сферический двуугольник («вырезок» по терминологии Лобачевского, см. «Геометрия», стр. 38 этой книги). Как выяснено в предыдущем примечании, Лобачевский выражает его площадь тем же числом, что и угол B.

[149] Точнее, окружности больших кругов, перпендикулярные к DE.

[150] Ссылка на предложение 15 здесь неправильна. Предложение 15 устанавливало равенство сферических треугольников по стороне и прилежащим к ней двум углам; в данном же случае у треугольников BHD и AFD (а также BHE и EGC) равны сторона и два угла, из которых один (прямой) *противолежит* этой стороне. Но в рассматриваемом случае, когда стороны треугольника меньше половины большого круга, сферические треугольники равны и при данных условиях [2]).

[151] Треугольники AFD и BHD симметричны относительно точки D; такие симметричные фигуры всегда могут быть приведены в положение, при котором они будут противолежать друг другу на сфере; поэтому находит себе применение предложение 26.

[152] Предложение 15 применяется здесь дважды: первый раз к треугольникам AFG и CGF (сторона FG общая, $AF = CG = BH$, углы F и G прямые), а второй раз — к треугольникам FAC и GCA ($AF = CG$, $AG = FC$, $\angle AFC = \angle CGF$, так как каждый из них получается вычитанием угла $CFG = AGF$ из прямого угла).

[153] Окончание доказательства приводим в свободном изложении, так как сжатый текст Лобачевского потребовал бы много примечаний.

Лобачевский доказал, что для всякого треугольника, сумма углов которого равна S, можно построить на той же сфере равновеликую ему «сферическую прямоугольную равнобочную трапецию» $ABCD$ (см. черт. 15, повторяющий черт. 19 Лобачевского), у которой боковые

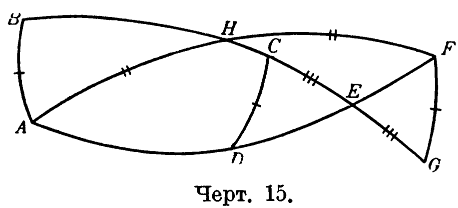
---

1) См. сочинение «О началах геометрии», Н. И. Лобачевский, Полн. собр. соч., т. I, стр. 219—220.

2) Это следует из того, что через точку сферы, не являющуюся полюсом, можно провести только один меридиан.

стороны AB и CD равны, углы при верхнем основании BC прямые, а каждый из двух углов при нижнем основании равен $\frac{S}{2}$ [1]).

Продолжим теперь верхнее и нижнее основания трапеции за вершину C до точки E их пересечения и построим прямоугольный сферический треугольник EGF, симметричный треугольнику ECD относительно этой точки. Затем соединим середину H дуги BG дугами больших кругов с точками A и F.



Черт. 15.

Лобачевский доказывает прежде всего, что эти дуги составляют продолжение одна другой. Это вытекает из равенства сферических треугольников ABH и FGH. Действительно, $AB = CD = GF$, $BH = GH$, углы B и G прямые. Следовательно, дуги AHF и $ADEF$ являются полуокружностями, так как они пересекаются в двух противоположных точках сферы A и F; каждая из них равна π, фигура $AHFEDA$ представляет «сферический вырезок» по терминологии Лобачевского.

Далее, Лобачевский составляет очевидную цепь равенств углов:

$$HAD = HFE = \frac{1}{2}S - BAH = \frac{1}{2}S - HFG = \frac{1}{2}S - HFE - EFG =$$
$$= \frac{1}{2}S - HAD - EDC = \frac{1}{2}S - HAD - (\pi - ADC) =$$
$$= \frac{1}{2}S - HAD - \left(\pi - \frac{1}{2}S\right) = S - \pi - HAD,$$

откуда $HAD = \frac{1}{2}(S - \pi)$. Согласно выбранной Лобачевским единице площади вырезок $AHFEDA$ имеет площадь, равную тому же выражению $\frac{1}{2}(S - \pi)$:

$$\text{Пл. } AHFEDA = \frac{1}{2}(S - \pi).$$

Но эта площадь может быть преобразована в площадь рассмотренной трапеции. Действительно,

$$AHFEDA = AHCD + HFE + CED = AHCD + HFE + FGE =$$
$$= AHCD + HFG = AHCD + HAB = ABCD.$$

Выше было установлено, что трапеция $ABCD$ равновелика исходному треугольнику; следовательно, его площадь равна $\frac{1}{2}(S - \pi)$.

[154] Речь идет о предложении, формулированном в конце предложения 25.

---

1) Стороны трапеции — дуги больших кругов.

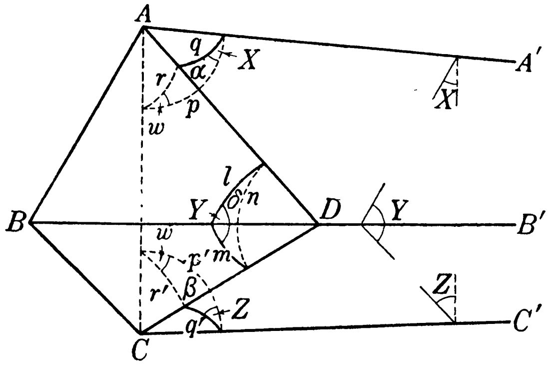
[155] Приводимый здесь черт. 16 соответствует чертежу 20 текста Лобачевского; на нем добавлены обозначения, введенные в тексте.

[156] Если искомый третий угол обозначим через ξ, то в силу предложения 27

$$\alpha = \frac{1}{2}(w + X + \xi - \pi),$$

откуда

$$\xi = \pi + 2\alpha - w - X.$$



Черт. 16.

[157] Легко видеть, что стороне l противолежит угол, смежный с тем, который на сфере C противолежит стороне p'. Точно так же стороне m противолежит угол, смежный с тем, который на сфере A противолежит стороне p.

[158] Лобачевский хочет сказать, что при неограниченном убывании двух сторон l и m сферического треугольника, которое имеет место, когда точка D беспредельно удаляется по параллели BB', его площадь δ стремится к нулю[1]). В равенстве

$$\frac{1}{2}(X + Y + Z - \pi) = \alpha + \beta + \delta - w$$

правая часть стремится к нулю, а левая сохраняет постоянное значение, которое поэтому не может быть отличным от нуля.

VII. Предельная линия

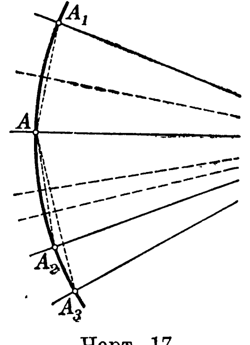
В этой главе впервые появляется геометрический образ, которого не существует в евклидовой геометрии, — плоская кривая, называемая *предельной линией* или *орициклом* (точный перевод с греческого — «предельный круг»).

Первые два предложения (29 и 30) носят подготовительный характер; предельная линия появляется в предложении 31 в результате своеобразного построения, связанного с пучком параллельных прямых, т. е. множеством всех прямых, лежащих в одной плоскости и параллельных друг другу в одном направлении. Если взять на

---

1) Дуги берутся в отношении к длине большого круга, а площади — в отношении к площади сферы.

одной из этих прямых (черт. 17) произвольную точку A и строить для нее симметричные точки A_1, A_2, A_3, ... по отношению ко всем остальным прямым этого пучка, то геометрическое место таких точек и есть предельная линия. Исходная точка A также включается в предельную линию и не является чем-нибудь выделяющейся — ее роль может играть любая из точек A_1, A_2, A_3, ...



Черт. 17.

Учитывая большое значение предельной линии при построении неевклидовой геометрии, в примечании [168] подробно изложены свойства предельной линии и различные точки зрения на ее происхождение.

Предложение 32 объясняет название этой линии — доказывается, что предельная линия есть предельное положение окружности, центр которой неограниченно удаляется в определенном направлении. «Поэтому, — заключает Лобачевский, — предельная линия может называться также *кругом с бесконечно большим радиусом*».

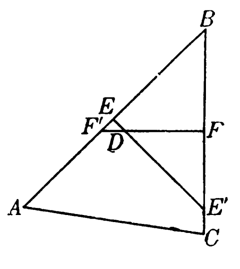
Наконец, в предложении 33 Лобачевский устанавливает важную аналитическую зависимость между длинами s и s' дуг двух предельных линий, образованных общим пучком параллельных прямых и заключенных между двумя параллелями этого пучка. Отношение этих длин оказывается очень простой функцией от расстояния x между ними: $s' = se^{-x}$. На этой формуле будет основана тригонометрия в плоскости Лобачевского; эта тригонометрия составит содержание последних глав сочинения.

[159] В евклидовой плоскости около всякого треугольника можно описать окружность; перпендикуляры, восставленные к сторонам треугольника из их середин, всегда пересекаются и притом в одной точке, которая и служит центром описанной около треугольника окружности. В неевклидовой геометрии Лобачевского дело обстоит иначе: если два из этих перпендикуляров пересекаются, то через точку их пересечения необходимо проходит и третий перпендикуляр; точка пересечения есть центр описанной окружности. Но может случиться, что два перпендикуляра вовсе не пересекутся; в таком случае не пересекаются никакие два из трех перпендикуляров: описанной около треугольника окружности не существует.

[160] Приведенное в тексте доказательство ничем не отличается от того, при помощи которого издавна доказывается, что около каждого треугольника можно описать окружность (Евклид, «Начала», IV, 5). Существенным моментом является только то, что при традиционном доказательстве всегда принимается, что точка пересечения D перпен-

дикуляров ED и FD всегда существует. Действительное же обоснование этого неизбежно опирается на евклидов постулат о параллельных линиях. Обнаружим это.

В треугольнике ABC во всяком случае существует острый угол. Положим (черт. 18), что B есть вершина острого угла и $AB \geqslant BC$. Из середины E стороны AB восставляем перпендикуляр EE'. Так как прямая EE' перпендикулярна к AB, а прямая BC образует с нею острый угол, то прямые EE' и BC пересекутся в некоторой точке E' (постулат о параллельных в так называемой Лежандровой форме[1])).

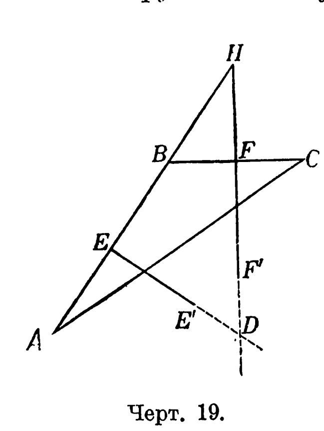


Черт. 18.

При этом угол $EE'B$ будет острый, так как треугольник BEE' прямоугольный. Если FF' есть перпендикуляр, восставленный к стороне BC из ее середины F, то $BF \leqslant BE < BE'$; FF' непременно пересечется с прямой $E'E$, образующей с BC острый угол, в некоторой точке D. Таким образом, традиционное доказательство существования центра описанной около треугольника окружности, проведенное со всей необходимой полнотой, дважды опирается на постулат о параллельных линиях.

В неевклидовой геометрии применить изложенное выше рассуждение нельзя. Более того, если допустить, что около всякого треугольника можно описать окружность, то отсюда вытекает постулат о параллельных линиях. Докажем это.

Допустим, следовательно, что *около всякого треугольника можно описать окружность*. Пусть теперь прямая EE' перпендикулярна к прямой AB, а другая прямая HF' образует с ней острый угол (черт. 19). Покажем, что при сделанном предположении наклонная HF' неизбежно встречает перпендикуляр EE', т. е. *имеет место постулат о параллельных линиях*. Для этого отложим на прямой EH по обе стороны от точки E равные отрезки $EA = EB$. Из точки B опустим на прямую HF' перпендикуляр BF, который не может совпасть с BH, потому что последняя прямая к HF' не перпендикулярна. На прямой BF от точки F по другую ее сторону отложим отрезок $FC = FB$. Тогда три точки A, B, C не лежат на одной прямой; согласно допущению, вокруг треугольника ABC можно описать окружность.



Черт. 19.

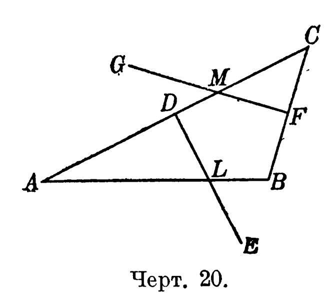
[1]) Стр. 248 этой книги.

Центр этой окружности неизбежно ляжет в точке пересечения прямых EE' и FF'.

Положение «через любые три точки, не лежащие на одной прямой, можно провести окружность» эквивалентно постулату Евклида; оно представляет собой одну из форм постулата, устанавливающего евклидову геометрию.

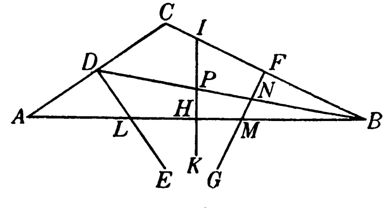
[161] Согласно предыдущей теореме эти три перпендикуляра могут друг с другом не пересекаться. В этом последнем случае любые два из них представляют собой либо параллельные, либо расходящиеся прямые. Настоящее предложение утверждает, что если два из трех перпендикуляров параллельны, то и все три между собой параллельны.

[162] На черт. 22 текста Лобачевского, при помощи которого Лобачевский обосновывает все доказательства, оба перпендикуляра DE и FG, восставленные к сторонам треугольника AC и BC из их середин D и F, пересекают третью сторону AB в точках L и M и притом так, что середина H третьей стороны лежит между точками L и M. Эту конфигурацию необходимо прежде всего обосновать.



Черт. 20.

Конечно, могло бы случиться, что перпендикуляр DE действительно встречает сторону треугольника AB, между тем как перпендикуляр FG встречает не AB, а AC, как это имеет место на черт. 20. Однако в предположении, что перпендикуляры DE, FG, HK не пересекаются (как это соответствует условию теоремы), конфигурация, приведенная на черт. 22 текста Лобачевского, всегда имеет место, если за основание AB взята *наибольшая* сторона треугольника ($AB \geqslant AC$, $AB \geqslant BC$, см. черт. 21). В самом деле, перпендикуляр HI к стороне AB, выходя из треугольника, пересекает бóльшую из двух других сторон треугольника, скажем, сторону CB, в некоторой точке I. Так как $AB \geqslant CB$, то $HB \geqslant FB$, а потому во всяком случае $IB > FB$ (предложение 9). Точка F лежит, следовательно, внутри стороны IB треугольника IHB. Перпендикуляр FM, входя внутрь треугольника IHB, должен пересечь еще одну его сторону; но сторону IH он встретить не может, так как перпендикуляры HK и FG по условию не пересекаются. Следовательно, он встречает сторону HB, т. е. точка M лежит между H и B.

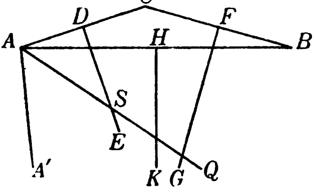


Черт. 21.

Заметим, что случай $AB = CB$ теперь нужно считать исключенным. В самом деле, медиана BD, входя внутрь треугольника FBM, должна встретить сторону FM в некоторой точке N. Если бы $AB = CB$, то перпендикуляр DE совпал бы с медианой DB и, следовательно, пересек бы перпендикуляр FG, что противно условию. Итак, $AB > CB$.

Но в таком случае в треугольниках ADB и CDB при общей стороне DB и при $AD = DC$ третьи стороны не равны ($AB > CB$). Следовательно, $\angle ADB > \angle CDB$ (предложение I. 24 «Начал» Евклида, не зависящее от постулата о параллельных). Следовательно, угол ADB тупой. Поэтому перпендикуляр DE входит внутрь четырехугольника $ADPH$; выходя из него, он не может встретить стороны PH, потому что он вообще не пересекается с перпендикуляром HK. Он встречает, таким образом, сторону AH в некоторой точке L.

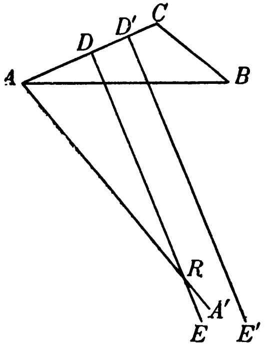
[163] Здесь, быть может, была бы уместнее ссылка и на предложение 17: луч DE, параллельный FG, сохраняет признак параллельности и в точке L; поэтому луч LG необходимо пересечет FG.



Черт. 22.

[164] Ибо LE не встречает HK по условию, а всякий луч LP, проходящий внутри угла ELH, встречает HK.

[165] Вряд ли здесь уместна ссылка на предложение 23. Ясно, что $\angle A'AD = \Pi(b)$, $\angle A'AH = \Pi(c)$, откуда и вытекает первое из трех равенств; совершенно таким же образом устанавливаются и два других.

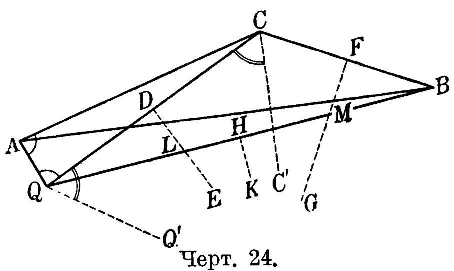


Черт. 23.

[166] По условию $FG \| HK$. Проводим луч AA', параллельный FG и HK (черт. 22). Всякий луч AQ, проходящий внутри угла $A'AH$, непременно встречает HK, а потому встречает и DE в некоторой точке S. Если поэтому луч AA' не встречает DE, то он ему параллелен.

[167] Если перпендикуляр DE встречает луч AA' в некоторой точке R (черт 23), то угол RAD или $A'AD$ меньше $\frac{\pi}{2}$. Если поэтому на AD отложим отрезок AD' так, что $\Pi(AD') = \angle A'AD$, т. е. так, что перпендикуляр $D'E'$ к AC параллелен AA', то точка D' должна будет упасть за точку D, т. е. $AD' > b$, а $D'C < b$. Но $\Pi(D'C) = \angle D'CC'$, $\Pi(CF) = \Pi(a) = \angle C'CF$. Поэтому $C = \Pi(D'C) + \Pi(a)$; а так как $D'C < b$, то $\Pi(D'C) > \Pi(b)$ и, следовательно, $C > \Pi(b) + \Pi(a)$.

Установив это неравенство, Лобачевский далее вращает сторону $CA = 2b$ вокруг точки C по направлению к CB. Длины a и b остаются при этом без изменения, вместе с тем сохраняет свое значение и сумма $\Pi(a)+\Pi(b)$; угол же C уменьшается. Поэтому наступит момент, в который $C=\Pi(a)+\Pi(b)$. Этот момент и изображен на черт. 23 текста Лобачевского, который мы здесь для ясности пополняем (черт. 24). Если теперь разделим угол QCB лучом CC' так, чтобы $\angle DCC' = \Pi(b)$, $\angle FCC' = \Pi(a)$, то оба луча DE и FG будут параллельны CC', а потому будут параллельны между собой. С другой стороны, $\angle Q'QD = \angle C'CD = \Pi(b)$. Поэтому $\angle BQD < \angle QCC' < \angle QCB$; отсюда следует $BQ > CB$. Совершенно аналогичным образом докажем, что $BQ > QC$, т. е. $BQ = c'$ остается наибольшей стороной в треугольнике BCQ. Мы находимся поэтому вполне в условиях уже



Черт. 24.

рассмотренного случая. Перпендикуляры DE и FG пересекают сторону QB в точках L и M, причем середина H стороны BQ лежит между ними. А так как перпендикуляры DE и FG между собой параллельны, то им параллелен и третий перпендикуляр HK, причем имеют место три равенства, установленных выше.

[168] Ввиду исключительной важности всех соображений, содержащихся в настоящем предложении, они подробнее изложены здесь с различных точек зрения. Это примечание полезно прочесть уже при первом ознакомлении с текстом.

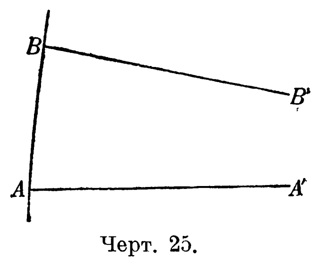
Изложим подробно указанное в тексте построение предельной линии.

Лобачевский предполагает сначала, что предельная линия задана некоторой определенной своей точкой A и проходящей через эту точку осью AB (черт. 24 текста Лобачевского). Под произвольным *острым* углом BAC к оси он проводит прямую AC, на ней откладывает отрезок $AD = a$, для которого $\Pi(a) = BAD$, так что перпендикуляр к нему DE параллелен AB; затем он удваивает этот отрезок, откладывая $DC = AD$. При непрерывном изменении угла CAB от $\frac{1}{2}\pi$ до 0 точка C образует предельную линию, определяемую «началом» A и «осью» AB. Перпендикуляр DE к хорде AC, выходящей из начала, к ее середине D, параллелен оси AB по самому построению кривой.

Совершенно так же перпендикуляр FG к хорде AH в ее середине F параллелен AB, а следовательно, и DE. Таким образом в треугольнике ACH перпендикуляры, восставленные к двум его сторонам из их середин, параллельны. В силу предложения 30 перпендикуляр KL к хорде HC в ее середине также параллелен AB; иначе говоря, все перпендикуляры, восставленные из середин хорд кривой в надлежащую сторону, параллельны между собой в соответствии с определением предельной линии. Вместе с тем ясно, что ту же кривую получим, если будем исходить, скажем, из точки H и примем за ось луч, проходящий через H параллельно AB. Таким образом, каждая точка предельной линии может быть принята за начало, а проходящая через нее ось — за начальную ось. Это может быть выражено в следующем виде:

Теорема 1. *Предельная линия вполне определяется любой своей точкой и осью.*

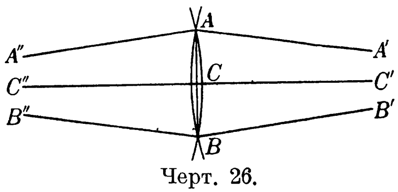
В тесной связи с этим находится еще одно важное свойство предельной линии. Передвинем предельную линию AB так, чтобы точка A совместилась с точкой B, а луч AA' — с лучом BB' (черт. 25). Тогда предельная линия совместится с самой собой, потому что она так же определяется точкой B и осью BB', как и точкой A и осью AA'. Так как точку B можно взять сколь угодно близко к A, то можно этому результату дать следующее выражение:



Черт. 25.

Теорема 2. *Предельная линия может скользить по себе самой подобно тому, как может скользить по себе самой прямая и окружность.*

Изложенное рассуждение обнаруживает также, что перпендикуляры, восставленные к хордам предельной линии из их середин, не только параллельны между собой, но параллельны осям кривой; они могут рассматриваться как ее оси. Отсюда еще следующий вывод:



Черт. 26.

Теорема 3. *Предельная линия определяется двумя своими точками с точностью до симметрии относительно прямой, соединяющей эти точки.*

В самом деле, если A и B суть две точки предельной линии, то мы найдем ее ось, восставив перпендикуляр к отрезку AB из ее середины C (черт. 26). Однако эта ось может быть направлена либо в сторону CC', либо в противоположную сторону CC''. В силу предыдущей теоремы отсюда следует, что через точки A и B проходят две (и только две) предельные линии; они симметричны относительно прямой AB. Третья точка уже определяет и сторону, в которую ось обращена.

Теорема 4. *Оси предельной линии, проведенные через две ее точки, одинаково наклонены к хорде, соединяющей эти точки.*

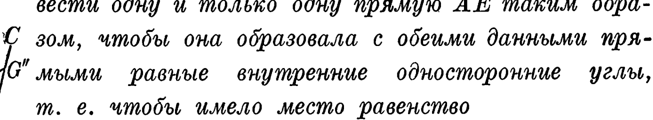
В самом деле, как мы видели, $\angle A'AB = \angle B'BA = \Pi\left(\frac{1}{2}AB\right)$. Это свойство предельной линии после Лобачевского часто принимают за ее определение и основывают на нем ее построение (см. ниже).

Если хорда AB стремится к нулю, то прямая AB обращается в пределе в касательную; угол $\Pi\left(\frac{1}{2}AB\right)$ при этом стремится к $\frac{1}{2}\pi$. Таким образом имеет место предложение:

Теорема 5. *Касательная к предельной линии перпендикулярна к оси, проходящей через точку касания.*

Приведем еще другое определение предельной линии; оно мало отличается от того, которое дано Лобачевским, но связанное с ним построение обладает большей наглядностью[1]). Мы приведем здесь подробное обоснование этого построения; это требует некоторых предварительных предложений.

Лемма 1. *Как бы ни были расположены две прямые AB и CD на плоскости* (черт. 27), *через каждую точку A одной из них можно провести одну и только одну прямую AE таким образом, чтобы она образовала с обеими данными прямыми равные внутренние односторонние углы, т. е. чтобы имело место равенство*



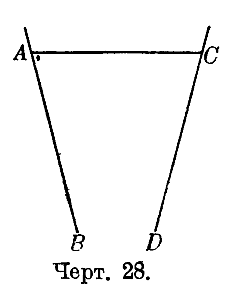
Черт. 27.

$$\angle AED = \angle EAB.$$

Чтобы это доказать, опустим из точки A перпендикуляр AG на прямую CD. Если бы оказалось, что прямая AG перпендикулярна также к AB, то это и была бы требуемая прямая. Положим поэтому, что AG образует с AB с одной стороны острый угол BAG, а с другой стороны — тупой угол $B'AG$. Со стороны AB, таким образом, угол BAG меньше внутреннего угла DGA, который секущая AG образует с той же стороны со второй прямой GD. Если точка G передвинется по направлению к точке C в точку G', т. е. если секущая AG повернется в положение AG', то угол, который она образует с лучом AB, возрастет: $\angle BAG' > \angle BAG$. Напротив, соответствующий односторонний угол при прямой CD уменьшится: $\angle AG'D < \angle AGD$. Отложим в сторону GC отрезок $GG'' = AG$. Тогда $\angle GAG'' = \angle GG''A$, а потому $\angle BAG'' > \angle AG''D$. Это значит, что когда секущая AG, вращаясь вокруг A, перейдет из положения AG в AG'', то угол, который она образует с лучом AB, бывший сначала меньше

[1]) Это определение принадлежит Гауссу.

соответствующего ему одностороннего угла при второй прямой, в положении AG'' станет больше его ($\angle BAG'' > \angle AG''D$). Между точками G и G'' в силу непрерывности изменения угла AGD будет поэтому существовать точка E, при которой $\angle BAE = \angle DEA$; AE и есть искомая прямая. При дальнейшем вращении секущей угол при луче AB возрастает, соответствующий же односторонний с ним угол уменьшается, равенство их нарушается. Через точку A проходит, следовательно, только одна прямая, обладающая требуемым свойством.



Черт. 28.

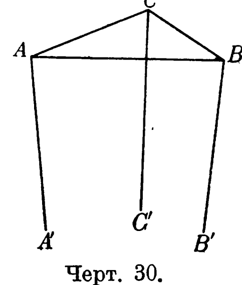
Эту прямую можно называть *секущей равного наклона* прямых AB и CD. Особенное значение имеет тот случай, когда лучи AB и CD параллельны (черт. 28). Если в этом случае AC есть секущая равного наклона, то Гаусс называет точку C *соответствующей точке* A на параллели CD. Каждой точке луча соответствует, таким образом, одна и только одна точка на любом параллельном луче.

Черт. 29.

В развитие леммы 1 приведем еще следующее предложение:

Лемма 2. *Перпендикуляр, восставленный к секущей равного наклона AC двух параллельных лучей AB и CD из ее середины E, параллелен этим лучам.*

На самом деле (черт. 29), ни одного из этих лучей он не может встретить, ибо через точку пересечения, если бы таковая существовала, вследствие равенства углов BAC и DCA неизбежно проходила бы и вторая параллель. Всякий же луч AG, проходящий внутри угла EAB, непременно встретит луч CD, а потому, переходя с одной стороны прямой EF на другую, необходимо пересечет луч EF в некоторой точке H (предложение 5 Лобачевского). Это рассуждение Лобачевский собственно и приводит при доказательстве предложения 30 (черт. 22 текста Лобачевского). Самое предложение 30 может быть в терминологии Гаусса формулировано следующим образом:



Черт. 30.

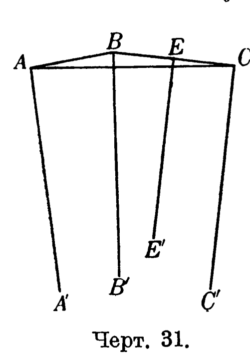
Лемма 3 (черт. 30). *Если через вершины A, B, C треугольника ABC в его плоскости проведем параллельные между собой лучи AA', BB', CC' и притом так, что точки A и B соответствуют друг другу на параллелях AA' и BB', а точки B и C соответствуют друг другу на параллелях BB' и CC', то точки A и C соответствуют друг другу на параллелях AA' и CC'.*

Еще иначе: *если через вершины A, B, C треугольника ABC в его плоскости проведем параллельные лучи AA', BB', CC' и при этом две стороны треугольника служат секущими равного наклона по отношению к соответствующим параллелям, то и третья сторона треугольника служит секущей равного наклона по отношению к параллелям, проходящим через ее концы.*

Обратимся теперь к той роли, которую эти предложения играют в геометрии Лобачевского или, лучше, в том определении предельной линии, которое мы здесь излагаем.

В некоторой плоскости представим себе луч AA' и совокупность всех ему параллельных лучей (пучок параллельных лучей, мы будем говорить короче: «пучок AA'»). Если будем исходить от определенной точки A на AA', то ей на каждом луче BB' пучка соответствует в установленном значении слова определенная точка B. *Геометрическое место точек B на всех лучах пучка и есть предельная линия Лобачевского.*

В самом деле, если B и C суть две точки этой линии, т. е. если они соответствуют точке A на параллелях BB' и CC', то в силу леммы 3 (т. е. предложения 30 в тексте Лобачевского) они и друг другу соответствуют на своих параллелях, т. е. BC есть секущая равного наклона по отношению к параллелям BB' и CC'. Согласно лемме 2 перпендикуляр EE' (черт. 31), восставленный из середины хорды BC, параллелен лучам BB', CC', т. е. принадлежит пучку AA'. Построенная линия обладает, таким образом, свойством, которым Лобачевский определяет предельную линию. Обратно, построение Лобачевского устанавливает, что его предельная линия обладает свойством, содержащимся в этом новом определении. В самом деле, если B есть точка предельной линии, определяемой началом A и осью AA', а хорда $AB = 2a$, то по построению Лобачевского $\angle A'AB = \angle B'BA = \Pi(a)$.



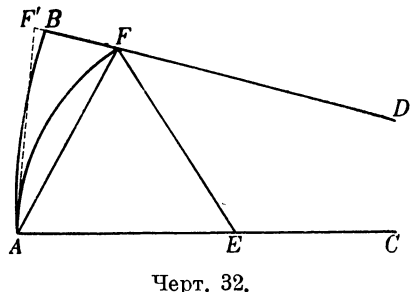
Черт. 31.

Если бы мы исходили при построении предельной линии не от точки A, а от другой точки B, то точка A, как соответствующая B на параллели BB', оказалась бы на предельной линии, определяемой точкой B и лучом BB'; на ней оказалась бы и каждая точка C той же линии. Это значит, что *любая точка предельной линии может быть принята за начало, а проходящая через нее ось — за начальную ось; результат, к которому приводит также построение Лобачевского, которое было указано выше.*

[169] Оси AC и BD, проведенные через концы хорды AB предельной линии, образуют с этой хордой равные углы (теорема 4 в при-

мечании [168]). Поэтому $\angle BAF = \angle BAC - \angle FAE = \alpha - \beta$. С другой стороны, внешний угол AFD треугольника ABF больше суммы внутренних, с ним не смежных, углов $BAF + ABF$, т. е. $\beta + \gamma > \alpha - \beta + \alpha$, что совпадает с неравенством, приведенным в тексте. Самое же предположение о том, что внешний угол больше суммы внутренних, с ним не смежных, вытекает из заключительных соображений предложения 22, на которое Лобачевский ссылается.

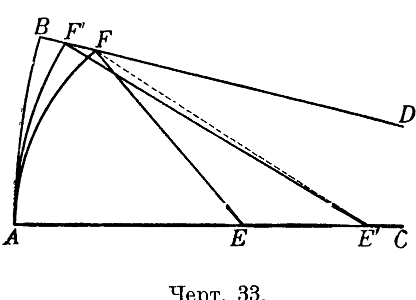
[170] Ссылка на предложение 21 неправильна. Из этого предложения можно было бы только заключить, что угол AEF стремится к нулю, когда точка E неограниченно удаляется вдоль оси AC. Угол же EFD неограниченно убывает потому, что луч FD параллелен AC, и тогда луч FE встречает AC при сколь угодно малом угле DFE. Все рассуждение доведено до конца в следующем примечании.



Черт. 32.

[171] Приведенное в тексте рассуждение несколько сжато, но по существу совершенно безукоризненно. Мы здесь доведем его до конца.

Черт. 32 воспроизводит черт. 25 текста Лобачевского. Здесь AF есть дуга окружности, описанной из точки E радиусом EA и встречающей прямую BD в точке F. Мы покажем прежде всего, что точка F при этом неизбежно лежит на луче BD, т. е. расположена относительно B со стороны точки D. Это следует из того, что $\angle AFD > \angle AFE$, а так как $\angle AFE = \angle FAE$, то $\angle AFD > \angle FAE$; между тем, если бы точка пересечения падала бы в F' по другую сторону от B, то угол $AF'B$ был бы меньше угла ABD, который по свойству предельной линии равен углу BAE. В тексте отчетливо доказано, что при этом $\angle BAF$ меньше $\frac{1}{2} \angle DFE$.

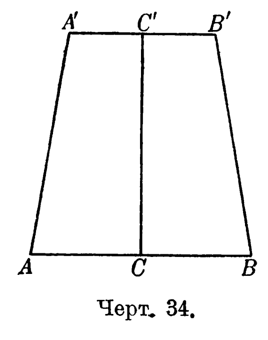


Черт. 33.

Теперь, после того как центр E уже выбран и точка F таким образом зафиксирована, возьмем произвольно малый угол ε и из точки F проведем луч FE' (черт. 33), образующий с FD угол $DFE' < \varepsilon$. Этот луч встретит луч AC (вследствие параллельности лучей FD и AC) в некоторой точке E'. Примем теперь точку E' за центр и проведем окружность радиусом $E'A$. Эта окружность встретит ось BD в точке F',

лежащей относительно B также со стороны точки D, но между B и F. Вместе с тем $\angle BAF' < \frac{1}{2} \angle DF'E'$, а $\angle DF'E' < \angle DFE'$, а потому $\angle BAF' < \frac{1}{2}\varepsilon$. Так как угол ε произвольно мал, то точка F' с увеличением радиуса неограниченно приближается к B.

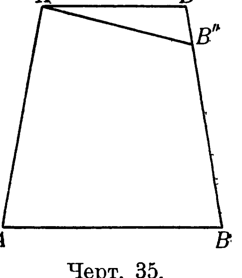
[172] Сущность этого рассуждения вряд ли может представить затруднение. Тем не менее точное обоснование этих заключений требует предварительного установления нескольких простых теорем.



Черт. 34.

Лемма 1. *Если в прямолинейном четырехугольнике $AA'B'B$* (черт. 34) *равны углы при «нижнем основании»* (угол A равен углу B) *и «боковые стороны»* ($AA' = BB'$), *то равны также углы при верхнем основании* (угол A' равен углу B'), *а средняя линия* (т. е. прямая CC', соединяющая середины обоих оснований) *перпендикулярна к основаниям.*

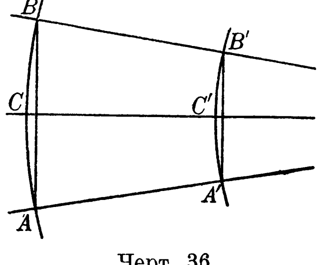
Доказательство осуществляется наложением четырехугольника самого на себя так, что AB совмещается с BA, BB' с AA' и обратно, а средняя линия CC' совмещается с самой собой.



Черт. 35.

Лемма 2. *Если в прямолинейном четырехугольнике $AA'B'B$ равны углы при верхнем и при нижнем основаниях* ($\angle A = \angle B$ *и* $\angle A' = \angle B'$), *то равны и боковые стороны* ($AA' = BB'$).

Доказательство (от противного). Допустим, что $AA' < BB'$ (черт. 35). Отложим на BB' отрезок $BB'' = AA'$. Теперь в четырехугольнике $ABB''A'$ углы при верхнем основании в силу предыдущей теоремы должны быть равны: $\angle AA'B'' = \angle BB''A'$, что несовместимо с равенством углов $AA'B'$ и $A'B'B$.



Черт. 36.

Теорема 1. *Отрезки осей, которые содержатся между предельными линиями, имеющими общие оси, равны между собой.*

На черт. 36 AA' и BB' суть две общие оси предельных линий AB и $A'B'$. Вследствие этого угол $A'AB$ равен углу $B'BA$ (см. подробное примечание [168]); по той же причине равны также углы $AA'B'$ и $BB'A'$; в силу леммы 2 поэтому равны отрезки AA' и BB'.

Теперь мы можем с полным основанием говорить о расстоянии x между двумя «параллельными» (т. е. имеющими общие оси) пре-

дельными линиями; это расстояние можно отсчитывать по любой оси: $AA' = BB' = x$.

Теорема 2. *Равным дугам предельной линии отвечают равные дуги на параллельной предельной линии.*

Если $AC = CB$, то мы совместим дугу AC с CB (см. теорему 2 в примечании [168]; дуга AC может скользить по CB). Тогда оси AA' и CC' пойдут по осям CC' и BB' (теорема 3 в том же примечании); равные отрезки AA' и CC', а также CC' и BB' соответственно совместятся, вместе с тем дуга $A'C'$ совместится с дугой $C'B'$ (та же теорема 3).

Теорема 3. *Соответствующие дуги s и s', t и t' двух параллельных предельных линий пропорциональны.*

Эта теорема доказана в тексте на основе теоремы 2.

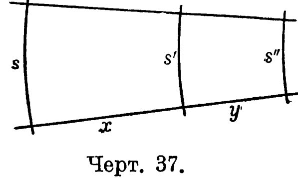
[173] Как показано в тексте, отношение $\frac{s}{s'}$ есть функция расстояния x между предельными дугами; от величин же дуг s и s' оно не зависит. Эту функцию обозначим через $f(x)$.

Возьмем три предельные дуги s, s', s'', содержащиеся между теми же двумя осями (черт. 37). Пусть x будет расстояние между дугами s и s', y — расстояние между дугами s' и s''. Тогда

$$s = s' \cdot f(x), \quad s' = s'' \cdot f(y), \quad s = s'' \cdot f(x+y).$$

Следовательно, функция $f(x)$ удовлетворяет функциональному уравнению

$$f(x+y) = f(x) \cdot f(y),$$



Черт. 37.

которое характеризует показательную функцию a^x 1). Так как по условию $f(1) = e$, то $a = e$, т. е. $s = e^x$, где e, однако, остается еще неопределенным. Лобачевский замечает, что надлежащим выбором единицы длины можно привести к тому, что основание e совпадет с основанием неперовых логарифмов. При выяснении этого для большей отчетливости будем исходить из формулы $s = s' \cdot a^x$.

Если мы увеличим единицу длины в k раз, то отношение $\frac{s}{s'}$ сохранит свое значение, число же x заменится числом $\bar{x} = \frac{x}{k}$. Поэтому мы будем иметь

$$s = s' \cdot a^{k\bar{x}} = s' \cdot (a^k)^{\bar{x}}.$$

Число k можно выбрать так, чтобы $a^k = e$, где e — основание неперовых логарифмов. Вместе с тем

$$s = s' \cdot e^{\bar{x}} \quad \text{или} \quad s' = s \cdot e^{-\bar{x}}. \qquad (1)$$

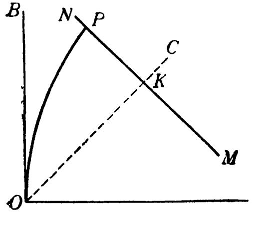
1) Решение этого функционального уравнения см., например, в книге: Г. М. Фихтенгольц, Курс дифференциального и интегрального исчисления, т. I, М.—Л., 1951, стр. 189—190.

Черта над x означает, что длина отрезка выражена в специфической единице, при которой формула (1) имеет место. Лобачевский раз навсегда устанавливает, что единица меры выбрана именно так, а потому пишет просто $s' = s \cdot e^{-x}$. Нужно, однако, твердо помнить, что этим зафиксирована единица длины.

В связи с этим нужно обратить внимание на следующее весьма важное обстоятельство. В гиперболической геометрии, как обнаруживают эти соображения, существует некоторая специфическая длина, выбор которой в качестве единицы меры имеет абсолютное преимущество: говорят, что в гиперболическом пространстве возможна «абсолютная мера длины». Эта единица меры определяется математически и на основе этого определения может быть фактически установлена только экспериментально [1]). Абсолютная мера длины гиперболического пространства есть та, в которой имеет место соотношение $s' = e^{-x}$, это — ее математическое определение.

Какова же эта единица фактически? Этот вопрос может быть разрешен только прямым измерением. Дальнейшие соображения по этому вопросу читатель найдет ниже, в примечании [221].

Отрезок, служащий при установленных соглашениях единицей длины, в настоящее время часто называют *радиусом кривизны пространства*. Возможность абсолютной единицы длины долго вызывала возражения против признания гиперболической геометрии. В евклидовом пространстве такой абсолютной единицы не существует: все прямолинейные отрезки здесь равноправны, и единица меры может быть установлена только заданием стандарта — зафиксированного стержня. Однако на сфере абсолютная мера длины в том смысле, как понимается этот термин, возможна: за таковую можно, например, принять длину окружности большого круга или определенную ее часть. Такой абсолютной единицей меры является также радиан, т. е. π-я часть полуокружности большого круга; в этой именно абсолютной единице обыкновенно пишутся все метрические соотношения сферической геометрии.



Черт. 38.

1) Абсолютная мера длины имеет простой геометрический смысл. Проведем биссектрису прямого угла AOB — луч OC (черт. 38) и отложим на нем отрезок OK, такой, что $\Pi(OK) = \frac{\pi}{4}$. Через точку K проведем прямую MN, перпендикулярную к этой биссектрисе. Очевидно, она будет параллельна как лучу OB, так и лучу OA (в различных направлениях). Теперь через точку O проведем предельную линию с осью OA. Ее дуга OP от точки O до пересечения с MN будет иметь длину, равную абсолютной мере k.

Доказательство этого см. в книге: Н. И. Лобачевский, Полн. собр. соч., т. II, стр. 524—525.

Если в гиперболическом пространстве за единицу меры принять не радиус кривизны пространства, а другой отрезок, в k раз меньший, то основное соотношение предложения 33 принимает вид

$$s' = s \cdot e^{-\frac{x}{k}}. \qquad (2)$$

Теперь радиус кривизны выражается числом k.

Если радиус сферы выражается числом R, то кривизна сферы выражается числом $\frac{1}{R^2}$; по аналогии с этим при соотношении (2) говорят, что кривизна гиперболического пространства выражается отрицательным числом $-\frac{1}{k^2}$. Этот выбор отрицательного числа имеет дополнительные основания, указанные ниже, в примечании [221].

Существование в геометрии Лобачевского абсолютной меры длины выясняет, в чем заключалась ошибка Лежандра, когда он пытался доказать теорему «сумма углов прямолинейного треугольника равна двум прямым», основываясь на принципе однородности [1]). Рассмотрим это подробнее.

Так называемый «принцип однородности» состоит в том, что линейная величина сама по себе не может определяться числом до тех пор, пока не выбран некоторый отрезок, принятый за единицу измерения. Поэтому во всякую формулу, содержащую линейные отрезки, должны обязательно входить только *отношения* этих отрезков. Таковы, например, тригонометрические соотношения между элементами прямолинейного треугольника, формулы сферической тригонометрии и т. д. В частности, *не может существовать соотношения между сторонами и углами треугольника, в которые входил бы только один отрезок:* в формулы прямолинейной тригонометрии входят отношения сторон или других линейных элементов треугольника, а в формулы сферической тригонометрии — отношение стороны (дуги большого круга) к радиусу сферы.

Опираясь на этот принцип, Лежандр следующим образом доказывает теорему о сумме углов треугольника [2]).

Двумя углами и стороной, к которой эти углы прилегают, треугольник вполне определяется, так что

$$C = \varphi(A, B, c). \qquad (1)$$

---

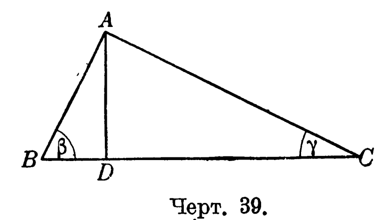
[1]) A. M. Legendre, Éléments de géométrie, Paris, 1794, Note IV; более подробно эти рассуждения Лежандра изложены в его мемуаре: A. M. Legendre, Réflexions sur différentes manières de démontrer la théorie des parallèles ou le théorème sur la somme des trois angles du triangle, Mémoires de l'Académie des Sciences, Paris, 1833, т. XII, стр. 367—410.

[2]) Передаем в изложении Х. Л. Герлинга (см. Н. И. Лобачевский, Полн. собр. соч., т. I, стр. 64—65).

Если примем прямой угол за единицу, то A, B и C будут числа. Отсюда следует, что c не должно входить в функцию φ — иначе бы нарушался принцип однородности, следовательно, соотношение (1) должно иметь вид

$$C = \varphi(A,\ B), \tag{2}$$

т. е. каждый угол треугольника определяется двумя другими углами¹).



Черт. 39.

В частности, если A есть прямой угол (черт. 39), то соотношение (2) переходит в

$$C = \psi(B), \tag{3}$$

т. е. в прямоугольном треугольнике каждый острый угол вполне определяется другим острым углом. Если мы обозначим острые углы треугольника ABC через β и γ, то

$$\beta = \varphi(\gamma) \quad \text{и} \quad \gamma = \varphi(\beta). \tag{4}$$

Проведем теперь высоту AD треугольника; он разобьется на два прямоугольных треугольника ABD и ACD; из треугольника ABD следует, что $\angle BAD = \varphi(\beta) = \gamma = C$, таким же образом $\angle CAD = \varphi(\gamma) = \beta = B$.

Следовательно, $B + C = A = \frac{\pi}{2}$, т. е. сумма углов прямоугольного треугольника равна двум прямым. Это же сразу доказывается и для косоугольного треугольника разбиением его на два прямоугольных.

Ошибка Лежандра состоит в том, что его исходная формула (1) недостаточно обоснована — она верна лишь в том предположении, что в геометрии не существует абсолютной меры длины, а это предположение эквивалентно постулату о параллельных линиях. Сферический треугольник также определяется стороной и двумя прилежащими к ней углами; однако в нем соотношение (1) не имеет места; оно заменяется следующим:

$$C = \varphi\left(A,\ B,\ \frac{c}{r}\right), \tag{1'}$$

и принцип однородности, таким образом, не нарушается. Здесь радиус сферы r играет роль абсолютной меры длины.

Точно так же и в геометрии Лобачевского соотношение (1) принимает вид

$$C = \varphi\left(A,\ B,\ \frac{c}{k}\right) \tag{1''}$$

---

¹) Это и имеет место в евклидовой геометрии: соотношение (2) имеет вид

$$C = \pi - A - B.$$

также согласно с принципом однородности. Во все формулы тригонометрии в плоскости Лобачевского входят не просто отрезки, а их отношения к абсолютной мере k. Основная функция Лобачевского — выражение угла параллельности

$$\alpha = \Pi(x)$$

содержит не один линейный отрезок, а два: x и k; она имеет вид

$$\alpha = 2 \operatorname{arctg} e^{-\frac{x}{k}}.$$

VIII. Предельная поверхность

Эта небольшая глава состоит только из одного предложения 34, содержащего определение предельной поверхности и доказательство некоторых ее свойств. Но не будет преувеличением сказать, что в ней содержится важнейший результат, полученный Лобачевским: восстановление евклидовой геометрии в неевклидовом пространстве.

Предельная поверхность (орисфера) может быть определена совершенно так же, как и предельная линия, только на этот раз вместо плоского пучка параллелей рассматривается *связка* параллелей в пространстве [1]). Лобачевский доказывает сначала равноправие всех осей поверхности, затем исследует ее плоские сечения (они оказываются либо предельными линиями, либо окружностями, причем через две точки поверхности можно провести только одну лежащую на ней предельную линию) и, наконец, исследует *предельный треугольник* — треугольник на предельной поверхности, сторонами которого являются предельные линии.

Сумма углов предельного треугольника оказывается равной двум прямым. Отсюда вытекает, что на предельной поверхности имеет место геометрия Евклида. «Насильственно устраненная с плоскости, она перенеслась на предельную поверхность и оттуда продиктовала законы пространства... Это был центральный момент в деле создания неевклидовой геометрии» [2]).

Теперь можно воспользоваться известными соотношениями евклидовой метрики, применив их для предельной поверхности. Это делает Лобачевский в следующей главе и при их помощи устанавливает тригонометрические соотношения в плоскости Лобачевского.

---

1) Лобачевский определяет предельную поверхность проще — как поверхность вращения предельной линии вокруг одной ее оси. Но приведенное нами определение имеет преимущество всякой аналогии; оно подробно развито в первом же примечании к этой главе.

2) В. Ф. Каган, Лобачевский и его геометрия, М., 1955, стр. 18. (Цитата включена редакцией наст. издания.)

[174] Предложение 34 составляет главную основу всего дальнейшего развития неевклидовой геометрии. Приведем его тщательный анализ и ряд указаний для уяснения дальнейшего текста.

Предельную поверхность Лобачевский определяет как такую поверхность, которая образуется вращением предельной линии вокруг одной из своих осей. Это определение, таким образом, существенно отличается от определения предельной линии. Между тем эти определения могут быть сближены. Все элементы для такого объединения содержатся и в предложении 34 «Геометрических исследований».

Предположим, как в тексте, что предельная поверхность образована вращением предельной линии вокруг ее оси AA' (черт. 27 текста Лобачевского). Лобачевский отмечает прежде всего, что во всякой точке B поверхности ось BB' наклонена к хорде AB под тем же углом, под которым к этой хорде наклонена ось вращения AA'. В терминологии Гаусса это означает, что точка B на луче BB' соответствует точке A на луче AA'; оно и естественно, так как B есть точка предельной линии, которая в плоскости осей AA' и BB' определяется началом A и осью AA' (см. примечание [168]). Но так как этим свойством обладает каждая точка предельной поверхности, то это приводит к следующему определению последней.

Представим себе все лучи *в пространстве*, параллельные лучу AA',— «связку параллелей» $\{AA'\}$. Каждый луч BB' этой связки лежит с AA' в одной плоскости, и на нем существует одна и только одна точка B, соответствующая (см. то же примечание) точке A луча AA'. *Геометрическое место точек B на всех лучах связки и есть предельная поверхность, определяемая точкой A и осью AA'.* Это определение предельной поверхности явно аналогично определению предельной линии в плоскости. Исследование предельной линии основывается, главным образом, на предложении, приведенном в указанном примечании в виде леммы 3. Это предложение остается в силе и в том случае, когда параллельные лучи AA', BB', CC' расположатся не в плоскости ABC, а как угодно в пространстве. Именно, доказательство этой теоремы и составляет главное содержание предложения 31 в тексте. Формулируем ее в этом виде.

Если AA', BB' и CC' суть параллельные между собой лучи, которые не расположены в одной плоскости, причем как точка B на луче BB', так и точка C на луче CC', соответствуют точке A на луче AA', то точки B и C соответствуют друг другу на лучах BB' и CC'.

Самое доказательство, приведенное в тексте, устанавливает прежде всего, что около треугольника ABC при условиях задания всегда можно описать окружность. Это не находится в противоречии с тем, что в гиперболической геометрии около данного треугольника не всегда возможно описать окружность. Дело в том, что рассматриваемый здесь

треугольник не произвольный: две его вершины соответствуют третьей на трех параллелях, проходящих через его вершины и не расположенных в одной плоскости. Это есть уже треугольник специфического строения, при котором описанная окружность всегда существует.

Доказательство заключается в том, что на перпендикуляре DF, восставленном в плоскости треугольника к стороне AB из ее середины D, устанавливается точка F, через которую проходит также перпендикуляр EF, восставленный из середины E стороны AC. При этом оказывается, что перпендикуляр, восставленный из точки F к плоскости треугольника, параллелен связке лучей AA', BB', CC'. Проведя через этот перпендикуляр и середину G третьей стороны BC плоскость, получим в сечении с плоскостью параллелей BB' и CC' луч GG', параллельный им и перпендикулярный к BC. Поэтому $\angle B'BC = \angle C'CB = \Pi\left(\frac{1}{2}CB\right)$, т. е. точки B и C соответствуют друг другу на параллелях BB' и CC'.

Если теперь за начало предельной поверхности примем точку B и луч BB' — за начальную ось, то точки A и C, как соответствующие ей на лучах AA' и CC', окажутся на поверхности. Это значит:

Каждая точка предельной поверхности может быть принята за начало, а проходящая через нее ось — за начальную ось.

Предельную поверхность можно, таким образом, рассматривать как поверхность вращения вокруг любой оси (подобно тому как это имеет место в случае сферы и плоскости).

Теперь уже нетрудно показать совершенно так же, как это было сделано в примечании [168] (теорема 2), что предельная поверхность может передвигаться по самой себе так, чтобы каждая ее точка пришла в совмещение с любой другой ее точкой, а вращением поверхности вокруг любой ее точки можно любой выходящий из этой точки предельный луч поверхности привести в совмещение с любым другим предельным лучом, выходящим из той же точки. На предельной поверхности, таким образом, возможны движения тех же типов, что и на плоскости или на сфере.

[175] Так как AA' есть ось вращения, то BB' и CC' суть оси предельных линий, служащих меридианами; поэтому оси BB' и AA' одинаково наклонены к хорде AB, а оси CC' и AA' одинаково наклонены к хорде AC (см. примечание [168], теорема 4). В предложении 31, на которое Лобачевский ссылается, это свойство предельной линии, конечно, содержится, но явно не выражено.

[176] Ссылка на предложение 23 вряд ли обоснована. Первое утверждение, что перпендикуляр DD' параллелен осям AA' и BB',

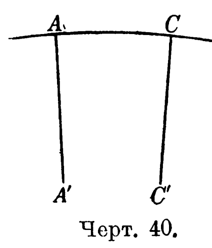
основано на самом определении предельной линии (предложение 31); вследствие предложения 25 он параллелен также оси CC'.

[177] См. примечание [138]. Если α есть линейный угол этого двугранного угла, то он здесь определяется тем числом a, для которого $\Pi(a) = \alpha$. Этот угол может оказаться острым, прямым или тупым, соответственно чему, как указано в тексте, a имеет положительное, нулевое или отрицательное значение. Этим способом определения угла Лобачевский в дальнейшем пользуется очень часто (см. примечание [183]).

[178] Плоскость $D'DF$ перпендикулярна к прямой AB, а потому перпендикулярна и к плоскости ABC (это предложение не фигурирует среди основных 15 предложений, но явно не зависит от постулата о параллельных линиях). Перпендикуляр FF', восставленный к прямой DF в плоскости $D'DF$, будет перпендикулярен и к плоскости ABC (предложение 13), или, иначе, перпендикуляр FF', восставленный из точки F к плоскости ABC, лежит в плоскости $D'DF$. А так как $\angle D'DF = \Pi(DF)$, то луч DD' параллелен лучу FF'.

[179] Прямая AE перпендикулярна к линии EE'; EF есть проекция линии EE' на плоскость ABC; поэтому прямая AE перпендикулярна к EF. Казалось бы, можно было непосредственно сослаться на предложение о перпендикуляре к проекции и к проектирующей линии. Но обычное доказательство этого предложения существенно предполагает, что наклонная EE' и проектирующий перпендикуляр FF' пересекаются. Вследствие этого Лобачевский восполняет это доказательство для того случая, когда луч EE' параллелен лучу FF'.

[180] Через ось AA' поверхности проведем плоскость, которая пересечет поверхность по некоторой линии AC (черт. 40). Как было показано выше, луч AA' можно рассматривать как ось, вращением вокруг которой линия AC образует поверхность; следовательно, AC есть предельная линия. Особенно отчетливо это выясняется, если исходить из другого определения предельной линии и поверхности (примечания [168] и [174]). По этому определению C есть точка луча CC', соответствующая точке A луча AA'; но тогда в плоскости параллелей AA', CC' точка C лежит на предельной линии, определяемой точкой A и осью AA'.

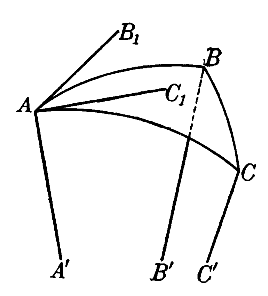


Черт. 40.

Если A, B, C суть три точки сечения, то через них, как доказано в примечании [174], проходит окружность (черт. 27 текста Лобачевского). Перпендикуляр FF' из центра этой окружности представляет собой ось поверхности. Плоскости $FF'AA'$, $FF'BB'$, $FF'CC'$ пересекают поверхность по предельным линиям AF, BF, CF. При вращении вокруг

оси FF' каждая из этих предельных линий образует рассматриваемую поверхность. Мы можем эти предельные линии рассматривать как меридианы; плоскость же ABC сечет поверхность по параллели, т. е. по окружности.

[181] Пусть ABC будет *предельный треугольник*, т. е. треугольник, составленный на предельной поверхности предельными линиями AB, BC, CA (черт. 41). Плоскости этих предельных линий пересекаются по осям AA', BB', CC'. Согласно предложению 28 сумма двугранных углов, образуемых этими плоскостями, равна π. Если в вершине A проведем касательные AB_1 и AC_1 к предельным линиям AB и AC, то они образуют линейный угол B_1AC_1 двугранного угла AA' (см. примечание [168]); с другой стороны, тем же углом B_1AC_1 измеряется и угол A предельного треугольника; то же относится и к углам B и C. Поэтому в предельном треугольнике ABC сумма углов $A+B+C=\pi$.



Черт. 41.

[182] Этот последний результат является центральным в неевклидовой геометрии. Рассмотрим его подробнее.

Евклидова двумерная геометрия, так называемая *планиметрия*, может быть построена рассуждениями, относящимися только к плоскости, т. е. без обращения в трехмерное пространство. Такое построение евклидовой планиметрии осуществляется на основе возможных в плоскости движений и постулатов, характеризующих ее основные образы, главным образом прямую. Движения в евклидовой плоскости характеризуются следующими «постулатами движения»:

a) *Плоскость может быть перемещена в самой себе таким образом, чтобы любая ее точка A пришла в совмещение с любой другой ее точкой A'* (принцип транзитивности движения).

b) *Плоскость может быть повернута в самой себе вокруг любой ее точки A таким образом, чтобы любой луч AB, выходящий из центра вращения, совместился с любым другим лучом AB', также выходящим из центра вращения* (принцип вращения).

Этими двумя постулатами устанавливаются возможные в плоскости движения. С присоединением к ним постулатов Евклида о прямой линии, постулатов, характеризующих расположение точек на прямой, постулата непрерывности, постулата Паша (см. примечание [102]), наконец, постулата о параллельных линиях получается база, на которой строится плоская геометрия Евклида.

Двумерная геометрия может быть в том же порядке идей построена и на другой поверхности, допускающей движения с теми же

степенями свободы. Такими поверхностями в евклидовом пространстве являются только сферы. На сфере возможны движения, удовлетворяющие принципу транзитивности и принципу вращения. Но роль прямых линий здесь играют окружности больших кругов, роль лучей — соответствующие полуокружности.

Однако постулаты, характеризующие окружности больших кругов на сфере, существенно отличаются от постулатов, характеризующих прямые на плоскости. Прямая вполне определяется любыми двумя точками, так что две прямые на плоскости могут пересекаться только в одной точке; окружности больших кругов на сфере всегда пересекаются в двух точках. Прямая может быть неограниченно продолжена в обе стороны; окружность большого круга есть замкнутая кривая конечного размера. Это порождает глубокое различие в геометриях плоскости и сферы. В евклидовом пространстве существуют два типа поверхностей, на которых может быть построена геометрия по принципу «свободной подвижности» [1]) — плоскости и сферы; им соответствуют два типа двумерной геометрии: плоская и сферическая, как теперь часто говорят, *евклидова* и *риманова*.

Обращаемся к «пространству Лобачевского», т. е. к пространству, в котором имеют место установленные им постулаты неевклидовой геометрии. Здесь на плоскости имеет место своеобразная «гиперболическая» геометрия, отличная от евклидовой. На сфере в гиперболическом пространстве имеют место те же движения, что и на сфере евклидова пространства; сферическая геометрия в гиперболическом пространстве не отличается от обычной, как она была построена в евклидовом пространстве. Лобачевский ниже обнаруживает (см. предложение 35), как далеко идет это совпадение.

Но в гиперболическом пространстве существует, кроме того, замечательный тип поверхностей, на которых имеет место свободная подвижность. Мы видели (заключительный абзац примечания [174]), что на предельной поверхности возможны движения, удовлетворяющие тем же основным двум постулатам.

При построении геометрии предельной поверхности роль прямых играют предельные линии. Предельная линия на предельной поверхности вполне определяется двумя точками. Действительно, если через точки A и B предельной поверхности проведем ее оси AA' и BB' и через них проведем плоскость, то она пересечет предельную поверхность по той единственной предельной линии, которая на этой поверхности проходит через точки A и B. Далее, предельную линию можно неограниченно продолжить в обе стороны. На предельной поверхности остаются в силе постулаты, определяющие расположение точек на

[1]) Этот термин принадлежит Софусу Ли («freie Beweglichkeit»).

предельной линии, постулат непрерывности, постулат Паша. Лобачевский еще даже не обладал точным перечнем постулатов геометрии; но из 15 предложений, приведенных им в начале настоящего сочинения в качестве базы для всего дальнейшего построения геометрии, 10 относятся к двумерной геометрии и как бы составляют принимаемую им аксиоматику плоской геометрии. Все эти 10 предложений остаются в силе на предельной поверхности, если в них заменить прямые предельными линиями. Поэтому для окончательного решения вопроса о характере геометрии остается только решить, ка́к обстоит дело с постулатом о параллельных линиях. Но мы знаем, что этот постулат эквивалентен предложению, что сумма углов в треугольнике равна π. В предельном треугольнике на предельной поверхности сумма внутренних углов действительно равна π. Следовательно, *на предельной поверхности имеет место евклидова геометрия*. Этот замечательный результат, таким образом, обнаруживает, что с отказом от постулата Евклида о параллельных линиях двумерная евклидова геометрия не прекращает своего существования: она только переносится с плоскости на предельную поверхность. В предельном треугольнике сохраняются соотношения евклидовой геометрии, что служит точкой отправления для построения метрики неевклидова пространства.

Полезно отметить, что в гиперболическом пространстве существуют поверхности еще одного типа, на которых возможно движение фигур без деформации с тремя степенями свободы; это — *эквидистантные поверхности*. Под эквидистантной поверхностью разумеют геометрическое место точек, отстоящих от заданной плоскости (базы поверхности) на одно и то же расстояние h (параметр поверхности). На плоскость можно смотреть как на эквидистантную поверхность с параметром $h = 0$. Геометрия на эквидистантной поверхности оказывается того же типа, что и геометрия на плоскости, — это *геометрия Лобачевского* (но с другой абсолютной мерой длины).

Таким образом, в гиперболическом пространстве существует три типа поверхностей, на которых возможны движения с тремя степенями свободы: сферические, эквидистантные и предельные поверхности.

IX. Уравнения, связывающие стороны и углы прямоугольного треугольника

Предложение 35, составляющее содержание главы, — наиболее важное во всем сочинении. В нем устанавливаются соотношения между сторонами и углами как в прямолинейном, так и в сферическом прямоугольном треугольнике. Вывод этих соотношений представляет собой образец тонкой, изумительно искусной цепи умозаключений, может быть, наиболее характерных синтетических рассуждений Лобачевского.

Вывод нельзя не признать довольно сложным при всей элементарности отдельных его приемов. Но наиболее ценной его стороной является совместное получение уравнений как плоской, так и сферической тригонометрии неевклидова (гиперболического) пространства. Сделаем краткий обзор этих рассуждений.

Предложение 35 разбивается на три части. Первая часть устанавливает, что каждому прямолинейному прямоугольному треугольнику соответствует некоторый сферический прямоугольный же треугольник; это соответствие взаимное: сферический треугольник в свою очередь определяет тот же прямолинейный треугольник. Если в этом сферическом треугольнике транспонируем катеты и противолежащие им углы, а затем воспроизведем соответствующий прямолинейный треугольник, то последний, как оказывается, получается из исходного прямолинейного треугольника не перестановкой катетов, а особой подстановкой, которую справедливо назвать *преобразованием Лобачевского.* Таким образом от каждого прямолинейного прямоугольного треугольника можно в неевклидовой плоскости двояким путем перейти к другому прямолинейному же прямоугольному треугольнику: один получается транспонированием катетов и острых углов; этот прямоугольный треугольник отличается от исходного только расположением катетов — он ему конгруэнтен; другой получается из исходного преобразованием Лобачевского, которое приводит к существенно отличному треугольнику. Вместе с тем всякое соотношение в прямоугольном треугольнике приводит в неевклидовой плоскости к ряду новых соотношений, которые получаются либо перестановкой катетов и острых углов, либо подстановкой Лобачевского.

Таким образом, достаточно получить одно соотношение между элементами прямоугольного треугольника, чтобы из него получить и остальные соотношения, алгебраически от него не зависящие. Этому и посвящена вторая часть этого предложения. Здесь Лобачевский строит предельную поверхность, проходящую через вершину одного из острых углов прямоугольного треугольника ABC и имеющую осью перпендикуляр к этой плоскости из той же вершины. Вместе с осями, выходящими из других вершин треугольника, эта ось определяет трехгранную поверхность, которая вырезывает на предельной поверхности предельный прямоугольный треугольник $AB''C''$, определяемый исходным треугольником. Стороны и углы этого предельного треугольника связаны уравнениями евклидовой геометрии. Углы предельного треугольника выражаются очень просто через углы данного треугольника. Поэтому уравнения, связывающие стороны и углы данного треугольника, содержат элементы как прямолинейного, так и предельного треугольника; стороны предельного треугольника нужно исключить; в этом главная задача дальнейшего исследования.

Вершины B и C треугольника отстоят от предельной поверхности по осям на расстояниях BB'' и CC''. Длины этих отрезков, очевидно, представляют собой определенную функцию от b и c — сторон треугольника. Лобачевский обозначает их поэтому через $f(b)$ и $f(c)$. Развернув трехгранную поверхность на плоскость, Лобачевский без труда доказывает, что три отрезка $f(a)$, $f(b)$, $f(c)$ связаны соотношением

$$f(c) = f(a) + f(b). \tag{1}$$

По существу это уже и есть соотношение, связывающее гипотенузу и катеты прямоугольного треугольника; нужно только разыскать функцию $f(x)$.

Лобачевский вторично строит предельную поверхность, исходя из вершины второго острого угла. Сопоставляя евклидовы соотношения между сторонами предельных треугольников, полученных один на первой, другой на второй предельной поверхности, и их развертки, Лобачевский получает новые соотношения

$$\sin \Pi(a) \cdot e^{f(a)} = \sin \Pi(b) \cdot e^{f(b)} = \sin \Pi(c) \cdot e^{f(c)}.$$

Но a и b суть независимые величины; все три части этих равенств представляют собой постоянные; полагая аргумент равным нулю, находим, что эта постоянная равна единице. Функция $f(x)$, таким образом, найдена:

$$e^{f(x)} = \frac{1}{\sin \Pi(x)}.$$

Написав теперь соотношение (1) в виде

$$e^{f(c)} = e^{f(a)} \cdot e^{f(b)},$$

получаем соотношение между катетами и гипотенузой уже в более конкретной форме:

$$\sin \Pi(c) = \sin \Pi(a) \cdot \sin \Pi(b).$$

Из этого уравнения он получает еще четыре при помощи подстановок, указанных в первой части этого предложения.

Наконец, в третьей части предложения 35, переходя от прямолинейного треугольника к связанному с ним сферическому, Лобачевский устанавливает уравнения сферической тригонометрии прямоугольного треугольника и обнаруживает, что они совпадают с соответствующими уравнениями евклидовой геометрии, т. е. не зависят от постулата о параллельных линиях.

В своих «Замечаниях» к «Геометрическим исследованиям» Лобачевского Янош Больаи назвал доказательства в предложении 35 выполненными с «творческой гениальностью».

[183] В евклидовой геометрии угол обычно измеряется либо в градусах (прямой угол измеряется числом 90 или 100), либо в радианах $\left(\text{прямой угол измеряется числом } \frac{\pi}{2}\right)$. Оба эти способа измерения угла применяются и в неевклидовой геометрии; но здесь возможен и своеобразный линейный способ выражения угла. Каждому острому углу φ отвечает отрезок, выражаемый в установленной единице меры числом x, для которого $\Pi(x) = \varphi$; это число x и представляет своеобразное, только в неевклидовой геометрии существующее выражение угла; его поэтому можно назвать *гиперболическим значением угла*; нужно, однако, иметь в виду, что гиперболическое значение угла не пропорционально величине угла. Этим гиперболическим значением угла Лобачевский уже и выше пользовался для выражения угла (см., например, предложение 34; двугранный угол выражен своим гиперболическим значением a); в дальнейшем он пользуется им систематически. Заметим еще, что $\Pi(x)$ выражает в радианах тот угол, гиперболическое линейное значение которого есть x.

Здесь, однако, Лобачевский вводит дополнительное соглашение, заключающееся в следующем. Обозначая через x гиперболическое значение некоторого угла, он обозначает через x' гиперболическое значение дополнительного угла. Таким образом углы $\Pi(x)$ и $\Pi(x')$ всегда дополняют друг друга до $\frac{1}{2}\pi$; это и выражено уравнением.

[184] Иными словами, каждый из острых углов прямоугольного треугольника ABC задается его гиперболическим значением α и β (см. предыдущее примечание).

[185] Двугранный угол (AA') измеряется углом A треугольника ABC, гиперболическое значение которого обозначено через α; следовательно, $(AA') = \Pi(\alpha)$. Плоскость $C'CA$, проходящая через перпендикуляр AA' к плоскости ABC, перпендикулярна к последней. Прямая BC, перпендикулярная к линии пересечения взаимно перпендикулярных плоскостей ACB и $AA'CC'$ и лежащая в первой из них, перпендикулярна ко второй (ссылка на предложение 13 в тексте). Поэтому плоскость $BB'CC'$, проходящая через BC, перпендикулярна к плоскости $AA'CC'$, двугранный угол (CC') прямой. Сумма двугранных углов (AA'), (BB'), (CC') равна π (ссылка на предложение 28 в тексте); поэтому угол (BB') дополняет (AA') до прямого; его гиперболическое значение есть α'.

[186] Сторона mn сферического треугольника измеряется углом $B'BA$; так как луч BB' параллелен AA', а AA' перпендикулярен к AB, то этот угол есть $\Pi(c)$; сторона mk таким же образом измеряется углом $B'BC = \Pi(a)$; сторона же kn измеряется углом B прямолинейного треугольника ABC, гиперболическое значение которого обозначено

через β. Угол m сферического треугольника измеряется двугранным углом BB' и поэтому равен, как было показано, $\Pi(\alpha')$; угол k измеряется двугранным углом BC или его линейным углом $C'CA$, а потому равен $\Pi(b)$. Плоскость $BB'AA'$, проходя через AA', перпендикулярна к плоскости ABC; двугранный угол (BA), которым измеряется угол n сферического треугольника, — прямой.

[187] Действительно, положим, что существует сферический треугольник kmn (черт. 28 текста Лобачевского) со сторонами $mn = \Pi(c)$, $kn = \Pi(\beta)$, $mk = \Pi(a)$ и противолежащими им углами $\Pi(b)$, $\Pi(\alpha')$, $\frac{1}{2}\pi$. На луче Bn отложим отрезок BA, равный c, и из точки A опустим перпендикуляр AC на прямую Bk. Полученный таким образом треугольник ABC будет удовлетворять требованию. Действительно, из точки A восставим перпендикуляр AA' к плоскости треугольника ABC; луч Bm обозначим через BB' и прямую пересечения плоскостей $B'BC$ и $A'AC$ обозначим через CC'. Угол $B'BA$ измеряется стороной mn сферического треугольника, а потому равен $\Pi(c) = \Pi(AB)$; следовательно, луч BB' параллелен AA'; вместе с тем луч CC' параллелен AA' и BB' (см. заключительный абзац предложения 25). С другой стороны, по самому построению плоскость $CC'AA'$ перпендикулярна к плоскости треугольника ABC; прямая BC перпендикулярна к плоскости $CC'AA'$, а вследствие этого она перпендикулярна и к прямой CC'; поэтому $\angle B'BC = \Pi(BC)$; но этот угол измеряется дугой mk сферического треугольника, а потому равен $\Pi(a)$; следовательно, $BC = a$. Далее, $\angle C'CA = \Pi(AC)$; но этот угол совпадает с углом k сферического треугольника, а потому равен $\Pi(b)$; следовательно, $AC = b$. Угол B прямоугольного треугольника ABC измеряется дугой kn, а потому равен $\Pi(\beta)$. Далее, двугранный угол (CC') прямой, двугранный угол (BB') совпадает с углом m сферического треугольника, а потому равен $\Pi(\alpha')$. Наконец, двугранный угол $(AA') = \frac{1}{2}\pi - (BB')$; но угол (BB') совпадает с углом $m = \Pi(\alpha')$ сферического треугольника, поэтому $(AA') = \Pi(\alpha)$; а так как угол (AA') измеряется линейным углом A, то $A = \Pi(\alpha)$. Итак, в треугольнике ABC стороны и углы имеют значения a, b, c, $\Pi(\alpha)$, $\Pi(\beta)$, т. е. существование сферического треугольника со сторонами $\Pi(c)$, $\Pi(\beta)$, $\Pi(a)$ и противолежащими углами $\Pi(b)$, $\Pi(\alpha')$, $\frac{1}{2}\pi$ обусловливает существование прямолинейного треугольника со сторонами a, b, c и противолежащими углами $\Pi(\alpha)$, $\Pi(\beta)$, $\frac{1}{2}\pi$.

Заменим теперь обозначения, к которым привели предшествующие соображения, более общими. Именно положим

$$c = x, \quad \beta = y, \quad a = z; \quad b = \xi, \quad \alpha' = \eta. \tag{1}$$

Тогда стороны и углы сферического треугольника можно будет представить таблицей:

$$\left.\begin{matrix} \Pi(x), & \Pi(y), & \Pi(z), \\ \Pi(\xi), & \Pi(\eta), & \frac{1}{2}\pi. \end{matrix}\right\} \qquad (A)$$

Мы можем смотреть на x и y как на линейные аргументы, определяющие катеты этого сферического треугольника, на z — как на аргумент его гипотенузы, на ξ и η — как на линейные аргументы его острых углов. Теорема, установленная в тексте и доказанная здесь, сводится к тому, что существование сферического прямоугольного треугольника (A) влечет за собой существование прямолинейного прямоугольного треугольника со сторонами и углами

$$\left.\begin{matrix} z, & \xi, & x, \\ \Pi(\eta'), & \Pi(y), & \frac{1}{2}\pi. \end{matrix}\right\} \qquad (B)$$

Это станет совершенно ясным, если заметим, что при

$$\Pi(\alpha)+\Pi(\alpha')=\frac{\pi}{2}, \quad \Pi(\eta)+\Pi(\eta')=\frac{\pi}{2} \text{ и } \eta=\alpha'$$

необходимо $\eta'=\alpha$.

Но в сферическом треугольнике (A) мы можем транспонировать катеты x и y, транспонируя в то же время аргументы острых углов, т. е. ξ и η. Иначе говоря, тот же сферический треугольник (A) мы можем, конечно, представить таблицей:

$$\left.\begin{matrix} \Pi(y), & \Pi(x), & \Pi(z), \\ \Pi(\eta), & \Pi(\xi), & \frac{1}{2}\pi, \end{matrix}\right\} \qquad (A')$$

а в таком случае он влечет за собой прямолинейный треугольник

$$\left.\begin{matrix} z, & \eta, & y, \\ \Pi(\xi'), & \Pi(x), & \frac{1}{2}\pi. \end{matrix}\right\} \qquad (B')$$

В применении к треугольнику, о котором идет речь в тексте, при обозначениях (1) это приводит к треугольнику

$$\left.\begin{matrix} a, & \alpha', & \beta, \\ \Pi(b'), & \Pi(c'), & \frac{1}{2}\pi. \end{matrix}\right\} \qquad (C)$$

Итак, существование прямолинейного прямоугольного треугольника

$$\left.\begin{matrix} a, & b, & c, \\ \Pi(\alpha), & \Pi(\beta), & \frac{1}{2}\pi \end{matrix}\right\} \qquad (C')$$

влечет за собой существование сферического треугольника

$$\left.\begin{matrix} \Pi(c), & \Pi(\beta), & \Pi(a), \\ \Pi(b), & \Pi(\alpha'), & \frac{1}{2}\pi; \end{matrix}\right\}$$

этот же влечет за собой, обратно, не только существование треугольника (C′), но и треугольника (C); эти два прямолинейных треугольника поэтому всегда существуют одновременно.

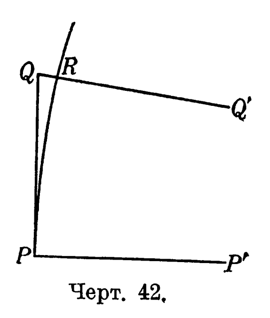
[188] Стороне p противолежит угол A, который и выражен через $\Pi(\alpha)$, стороне q противолежит угол, измеряемый двугранным углом $(B''B')$, который дополняет A до $\frac{1}{2}\pi$ и потому равен $\Pi(\alpha')$. В прямоугольном предельном треугольнике стороны и углы связаны уравнениями обыкновенной (т. е. евклидовой) тригонометрии.

[189] Потому что это будут предельные линии на плоскости, имеющие в каждой из точек схождения A и C'' общую ось (точнее, параллельные оси).

[190] Если в какой-либо точке A предельной линии проведем к ней касательную $AC = b$ и из точки C проведем ось CC', параллельную AA', которая встретит предельную линию в точке C'', то длина отрезка CC'' явно будет функцией от b, которую Лобачевский и обозначает через $f(b)$. Соответственно $BB'' = f(c)$.

[191] Согласно предложению 33, $t = pe^x$, где x есть длина отрезка CC'', выраженная в установленной в предложении 33 единице меры, а так как $CC'' = f(b)$, то мы и получаем соотношение, приведенное в тексте.

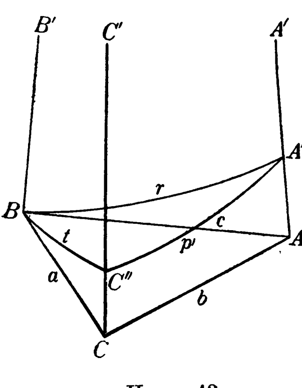
[192] Воспроизводим чертежи и рассуждения, соответствующие этой второй конфигурации. Заметим предварительно следующее: если из точки P предельной линии PR (черт. 42) проведем касательную PQ на ней отложим отрезок PQ и из точки Q проведем луч QQ', параллельный оси PP', который встретит предельную линию в точке R, то дуга PR вполне определяется длиной отрезка PQ. Если этот отрезок назовем *тангенциальной высотой* предельной дуги PR, то можно будет сказать, что *предельная дуга определяется своей тангенциальной высотой*. На черт. 28 и 30 текста Лобачевского r, q и t суть предельные дуги, которые соответственно определяются тангенциальными высотами c, b и a.



Черт. 42.

Теперь воспроизведем второе построение Лобачевского.

Перпендикуляр к плоскости прямоугольного треугольника восставим не из точки A, а из вершины B; из вершин же C и A проведем лучи CC' и AA', параллельные BB' (черт. 43). Далее, принимая B за начало, луч BB' за ось, построим предельную поверхность, которая пересечет плоскости параллелей по предельным дугам BA'', BC'', $C''A''$. Тангенциальной высотой дуги BA'' служит отрезок c, а потому ее длина имеет то же значение r, что и в прежней конфигурации. Дуга BC'' имеет тангенциальную высоту a, поэтому ее длина равна t (по прежней конфигурации). Дугу $C''A''$ обозначим через p'. Из предельного прямоугольного треугольника $A''BC''$ теперь получим:



Черт. 43.

$$p' = r \sin B = r \sin \Pi(\beta), \quad t = \cos \Pi(\beta). \quad (1)$$

Теперь разрежем трехгранную поверхность по прямой AA' и развернем ее на плоскость (черт. 44), подобно тому как это делает Лобачевский. В этом случае, как мы видим, $BA'' = r$, $BC'' = t$; предельная же дуга CD, имеющая тангенциальную высоту b, равна q, r остается без изменения, а места дуг q и t занимают дуги t и q.

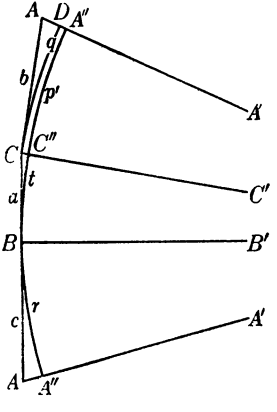
Теперь, аналогично прежней конфигурации, $CC'' = f(a)$. Поэтому

$$CD = q = p'e^{f(a)}.$$

Подставляя же сюда вместо p' выражение (1), получим:

$$q = r \sin \Pi(\beta)\, e^{f(a)},$$

как в тексте Лобачевского.



Черт. 44.

[193] Подстановка производится в найденную выше формулу $q = r \cos \Pi(\alpha)$. Далее мы делаем замену α и β через b' и c согласно установленной выше возможности перейти от элементов a, b, c, α, β к элементам a, α', β, b', c; при этом $\cos \Pi(b') = \cos\left[\frac{1}{2}\pi - \Pi(b)\right] = \sin \Pi(b)$.

[194] Это соотношение получается из предыдущего при помощи той же замены, которая указана в примечании [193].

[195] Первое из этих трех уравнений получаем из предыдущего, заменяя друг другом катеты a и b, а вместе с тем и противолежащие

им углы $\Pi(\alpha)$ и $\Pi(\beta)$; второе получим из первого при помощи подстановки, указанной в примечании [193], третье получим из второго новой транспозицией катетов и прилежащих им острых углов.

[196] Сопутствующем, как показано в тексте, нашему прямолинейному прямоугольному треугольнику.

[197] Приведенными пятью уравнениями не ограничиваются все соотношения между сторонами и углами прямоугольного треугольника. Таких соотношений должно быть десять, по числу сочетаний из 5 по 3, всего в треугольнике пять элементов (три стороны и два угла); любыми двумя из них треугольник определяется; следовательно, в каждое соотношение входит три элемента. Все эти 10 соотношений приведены ниже в примечании [204].

X. Разыскание функции $\Pi(x)$

В предыдущей главе были получены все тригонометрические соотношения для прямоугольного треугольника. Но эти формулы не были еще окончательными: в них входила одна неизвестная функция $\Pi(x)$ — *угол параллельности*, соответствующий отрезку x.

Эта функция была введена еще в самом начале сочинения — во второй главе (предложение 16) — только для положительных x. Затем в главе IV (предложение 23) была установлена ее качественная характеристика и дано обобщение этой функции для всех действительных значений аргумента. График этой функции намечен в вводном примечании к главе IV (черт. 9 на стр. 276) — он напоминает график арктангенса, несколько деформированный.

В настоящей главе Лобачевский искусным сочетанием геометрических и аналитических средств устанавливает окончательное выражение для этой функции; она действительно выражается при помощи арктангенса:

$$\Pi(x) = 2 \operatorname{arctg} e^{-x}.$$

Число e, входящее в эту формулу, первоначально является произвольной константой, зависящей от единицы измерения отрезка x. Лобачевский выбирает эту единицу так, чтобы e оказалось основанием натуральных логарифмов.

[198] Черт. 32 сделан в предположении $c > \beta$; случаи $c \leqslant \beta$ рассмотрены ниже.

[199] Ссылка на предложение 23 относится к его заключительному абзацу.

[200] Написав предыдущее равенство в виде пропорции

$$\frac{\cos \Pi(c)}{1} = \frac{\cos\left[\frac{1}{2}\Pi(c-\beta) + \frac{1}{2}\Pi(c+\beta)\right]}{\cos\left[\frac{1}{2}\Pi(c-\beta) - \frac{1}{2}\Pi(c+\beta)\right]},$$

составляем производную пропорцию:

$$\frac{1-\cos\Pi(c)}{1+\cos\Pi(c)} =$$

$$= \frac{\cos\left[\frac{1}{2}\Pi(c-\beta) - \frac{1}{2}\Pi(c+\beta)\right] - \cos\left[\frac{1}{2}\Pi(c-\beta) + \frac{1}{2}\Pi(c+\beta)\right]}{\cos\left[\frac{1}{2}\Pi(c-\beta) - \frac{1}{2}\Pi(c+\beta)\right] + \cos\left[\frac{1}{2}\Pi(c-\beta) + \frac{1}{2}\Pi(c+\beta)\right]} =$$

$$= \frac{\sin\frac{1}{2}\Pi(c-\beta)\cdot\sin\frac{1}{2}\Pi(c+\beta)}{\cos\frac{1}{2}\Pi(c-\beta)\cdot\cos\frac{1}{2}\Pi(c+\beta)}.$$

[201] При $\beta = c$, $\Pi(c-\beta) = \frac{1}{2}\pi$, $\operatorname{tg}\frac{1}{2}\Pi(c-\beta) = 1$ полученное равенство принимает вид

$$\left[\operatorname{tg}\frac{1}{2}\Pi(c)\right]^2 = \operatorname{tg}\frac{1}{2}\Pi(2c). \qquad (1)$$

При $\beta = 2c$

$$\Pi(c-\beta) = \Pi(-c) = \pi - \Pi(c); \quad \operatorname{tg}\frac{1}{2}\Pi(c-\beta) = \operatorname{ctg}\frac{1}{2}\Pi(c),$$

а потому предыдущее равенство дает

$$\left[\operatorname{tg}\frac{1}{2}\Pi(c)\right]^3 = \operatorname{tg}\frac{1}{2}\Pi(3c).$$

Далее, при $\beta = 3c$

$$\Pi(c-\beta) = \Pi(-2c) = \pi - \Pi(2c); \quad \operatorname{tg}\frac{1}{2}\Pi(c-\beta) = \operatorname{ctg}\frac{1}{2}\Pi(2c)$$

и, таким образом, в силу соотношения (1) при $\beta = 3c$

$$\operatorname{tg}\frac{1}{2}\Pi(c-\beta) = \left[\operatorname{tg}\frac{1}{2}\Pi(c)\right]^{-2}.$$

Вместе с тем основное уравнение, установленное в тексте, дает

$$\left[\operatorname{tg}\frac{1}{2}\Pi(c)\right]^4 = \operatorname{tg}\frac{1}{2}\Pi(4c).$$

Продолжить эти рассуждения или провести их в общем виде уже нетрудно.

[202] Если фиксируем c и положим $n = \frac{x}{c}$, то предыдущее соотношение примет вид

$$\operatorname{tg}\frac{1}{2}\Pi(x) = \left[\operatorname{tg}\frac{1}{2}\Pi(c)\right]^n = \left[\operatorname{tg}\frac{1}{2}\Pi(c)\right]^{\frac{x}{c}}.$$

Если c есть положительное число, то $\operatorname{tg}\frac{1}{2}\Pi(c)$ есть правильная дробь, так как $\Pi(c) < \frac{\pi}{2}$. Поэтому всегда можно найти такое число $e > 1$, при котором

$$\operatorname{ctg}\frac{1}{2}\Pi(c) = e^c.$$

Предыдущее равенство примет вид

$$\operatorname{tg}\frac{1}{2}\Pi(x) = e^{-x}. \qquad (\Pi)$$

Этим сделан следующий важный шаг: установлена функция $\Pi(x)$. В явном виде она выражается формулой

$$\Pi(x) = 2\operatorname{arctg} e^{-x}.$$

Вывод функции $\Pi(x)$, как позже указал сам Лобачевский, был получен еще в 1826 году, в неизданном сочинении «Краткое изложение основ геометрии со строгим доказательством теоремы о параллельных» [1]).

[203] Когда было введено обозначение «e», то о нем говорилось только, что это — некоторое положительное число, большее единицы. Значение этого числа остается произвольным в том смысле, что постулаты, на которых построена геометрия Лобачевского, совместимы с любым значением числа e. Но самое установление этого числа, очевидно, связано с единицей меры, в которой выражается длина x. С изменением единицы меры значение e будет меняться; при надлежащем выборе единицы число e должно совпасть с основанием натуральных логарифмов.

При всем том в этом рассуждении есть некоторая неувязка с предыдущим. Дело в том, что совершенно аналогичное рассуждение уже было проделано в предложении 33 в применении к соотношению $s' = se^{-x}$ [2]), связывающему длины предельных дуг, содержащихся между двумя осями. И там число e зависело от единицы меры, в которой выражено расстояние x между дугами. Единица меры была уже там установлена так, чтобы e имело значение основания неперовых логарифмов. Стало быть, вновь устанавливать единицу так, чтобы и в новой показательной функции привести основание e к неперову числу, безоговорочно нельзя. В действительности дело обстоит так, что обе экспоненциальные функции приводятся к неперову основанию при одной и той же единице меры. Лобачевский сам обнаружил этот дефект и исправил его в «Пангеометрии» (см. стр. 172 этой книги).

---

[1]) См. примечание Лобачевского к сочинению «Новые начала геометрии с полной теорией параллельных» (Н. И. Лобачевский, т. II, стр. 321).

[2]) См. примечание [173].

XI. Уравнения, связывающие стороны и углы всякого треугольника

Заключительная глава состоит только из одного предложения 37. Но в нем содержится очень много важного материала.

Сначала Лобачевский возвращается к прямоугольному треугольнику, рассмотренному еще в главе IX, и указывает для него два дополнительных соотношения, обозначенных номерами 1 и 2 и необходимых для дальнейших вычислений. Вывода этих формул Лобачевский не приводит: соответствующие выкладки проведены в примечании [204] [1]). Вообще в этой главе опущены многие громоздкие, но элементарные выкладки; они восполнены в примечаниях к соответствующим местам.

Далее выводятся формулы для решения косоугольного треугольника при помощи его разложения на два прямоугольных (или в случае тупоугольного треугольника — дополнением его до прямоугольного). Искусными, хотя и очень громоздкими выкладками (в основном только намеченными), Лобачевский получает четыре основные формулы, обозначенные номерами 3, 5, 6 и 7 (формулы 4 носят вспомогательный характер). Он собирает их вместе под номером 8 (в сочинении «О началах геометрии» они фигурировали под номером 17 [2])); вместе с их модификациями после всех возможных перестановок сторон и углов эти формулы дают 15 соотношений, образующих полную систему для решения любого косоугольного треугольника [3]).

В заключении этого предложения и всего сочинения Лобачевский делает из формул (8) выводы принципиального характера.

Во-первых, формулы (8) переходят в основные соотношения евклидовой геометрии, если стороны треугольника бесконечно малы, точнее, если можно пренебречь третьими степенями их отношений к единице измерения [4]). Таким образом в достаточно малом треугольнике по сравнению с этой единицей царят соотношения евклидовой геометрии независимо от того, принят или отвергнут пятый постулат Евклида. Лобачевский указывает, что в своем сочинении «О началах геометрии» он, основываясь на результатах астрономических наблюдений, установил, что в пределах осуществимой их точности сумма углов тре-

---

[1]) В этом примечании приводятся вместе с их выводами все 10 соотношений, составляющих «полную систему» для решения прямоугольного треугольника по любым его двум элементам. Лобачевский получил эти соотношения еще в «Новых началах геометрии с полной теорией параллельных», но здесь, в кратком изложении важнейших фактов неевклидовой геометрии, он ограничивается только теми из них, которые ему понадобятся в дальнейшем.

[2]) См. Н. И. Лобачевский, Полн. собр. соч., т. I, стр. 206.

[3]) См. примечание [217].

[4]) Подробнее об этом см. примечание [221].

угольника между двумя положениями Земли (в противоположных точках ее орбиты) и Сириусом равна π[1]). Следовательно, при единице измерения, превышающей размеры такого космического треугольника, имеет место геометрия Евклида, и можно «принятые начала этой геометрии рассматривать как бы строго доказанными»[2]).

Во-вторых, — и этим Лобачевский заканчивает свое сочинение — уравнения (8) при подстановке в них вместо сторон a, b, c величин ai, bi, ci ($i=\sqrt{-1}$) перейдут в основные уравнения сферической тригонометрии. Но эти последние уравнения выводятся и в евклидовой геометрии. Из уравнений (8) или равносильных им может быть развернута и построена вся геометрия Лобачевского (что Лобачевский осуществил в своем сочинении «Воображаемая геометрия»). Следовательно, «обыкновенная Геометрия, Тригонометрия и эта новая Геометрия будут всегда согласны между собой» — заключает Лобачевский[3]).

[204] В конце предложения 35 были получены пять соотношений между сторонами и углами прямоугольного треугольника. *Из них независимыми являются только три.* Лобачевский указывает, что за такие три уравнения могут быть приняты те два уравнения, которые приведены в тексте, и третье, которое получается из второго транспозицией катетов и противолежащих им острых углов.

Из этих уравнений путем исключения то одних, то других элементов треугольника могут быть получены не только два дополнительных уравнения, приведенных в предложении 35, но и еще пять уравнений, которые совместно с приведенными пятью дают возможность по любым двум элементам вычислить любой третий элемент. Эти десять уравнений (соответствующие числу сочетаний из пяти элементов по три) Лобачевский то отдельными группами, то совместно приводит, можно сказать, во всех сочинениях. Они все сгруппированы в ст. 141 «Новых начал геометрии с полной теорией параллельных»[4]). Ниже приводятся все эти десять уравнений прямоугольного треугольника и дан их вывод из тех трех, которые Лобачевский принимает за исходные.

Если перейти к обычным обозначениям углов, т. е. вместо $\Pi(\alpha)$ и $\Pi(\beta)$ писать A и B, то два уравнения, приведенные в начале настоящего предложения, примут вид

$$\sin \Pi(c) = \sin \Pi(a) \cdot \sin \Pi(b), \qquad (1)$$

$$\sin A = \sin \Pi(b) \cos B. \qquad (2)$$

1) См. Н. И. Лобачевский, Полн. собр. соч., т. I, стр. 207—209 (см. также последние примечания к сочинению «Пангеометрия» на стр. 377—380 этой книги).

2) Там же, стр. 209.

3) Там же, стр. 261.

4) Н. И. Лобачевский, Полн. собр. соч., т. II, стр. 332.

Транспонируя в последнем уравнении углы A и B и заменяя соответственно этому катет b катетом a, получим третье уравнение, о котором говорит Лобачевский:

$$\sin B = \sin \Pi (a) \cos A. \tag{3}$$

Перемножая уравнения (2) и (3) и учитывая (1), получаем:

$$\sin \Pi (c) = \operatorname{tg} A \operatorname{tg} B. \tag{4}$$

Исключая B из уравнений (2) и (3), получаем:

$$\frac{\sin^2 A}{\sin^2 \Pi (b)} + \sin^2 \Pi (a) \cos^2 A = 1.$$

Освобождая это уравнение от знаменателя и заменяя в силу уравнения (1) произведение $\sin \Pi (a) \sin \Pi (b)$ через $\sin \Pi (c)$, получаем:

$$\sin^2 \Pi (c) \cos^2 A = \sin^2 \Pi (b) - \sin^2 A,$$

и, следовательно,

$$\cos^2 \Pi (c) \cos^2 A = \cos^2 \Pi (b).$$

Извлекая квадратный корень из обеих частей и принимая во внимание, как на это указывает Лобачевский, что все углы A, $\Pi (b)$, $\Pi (c)$ острые, получаем:

$$\cos \Pi (c) \cos A = \cos \Pi (b). \tag{5}$$

Если из уравнений (2) и (3) исключим не угол B, а угол A, то таким же образом получим:

$$\cos \Pi (c) \cos B = \cos \Pi (a). \tag{6}$$

Это и есть уравнение, приведенное в тексте ниже, под номером 2. Оно приведено и в предыдущем предложении. Теперь исключим угол A из уравнений (5) и (4). Если для этого напишем эти уравнения в виде

$$\cos A = \frac{\cos \Pi (b)}{\cos \Pi (c)}, \quad \operatorname{tg} A = \sin \Pi (c) \operatorname{ctg} B,$$

то исключение дает

$$\frac{\cos^2 \Pi (c)}{\cos^2 \Pi (b)} = 1 + \sin^2 \Pi (c) \operatorname{ctg}^2 B.$$

Вычисляя отсюда $\operatorname{ctg} \Pi (b)$, получим:

$$\operatorname{ctg} \Pi (b) = \operatorname{ctg} \Pi (c) \sin B. \tag{7}$$

Таким же образом, исключая из уравнений (4) и (5) угол B, получим:

$$\operatorname{ctg} \Pi (a) = \operatorname{ctg} \Pi (c) \sin A. \tag{8}$$

Это и есть уравнение (1), приведенное ниже в тексте.

Наконец, перемножая уравнения (5) и (8), получим:

$$\operatorname{ctg} \Pi(a) \cos \Pi(c) \cos A = \operatorname{ctg} \Pi(c) \sin A \cos \Pi(b).$$

Так как $\cos \Pi(c) \neq 0$, то можно сократить уравнение на $\cos \Pi(c)$. Заменяя после этого в силу соотношения (1) $\sin \Pi(c)$ на $\sin \Pi(a) \sin \Pi(b)$, получим:

$$\cos \Pi(a) = \operatorname{ctg} \Pi(b) \operatorname{tg} A \tag{9}$$

и аналогично этому

$$\cos \Pi(b) = \operatorname{ctg} \Pi(a) \operatorname{tg} B. \tag{10}$$

Уравнения (7) и (8) отличаются от соответствующих уравнений евклидовой геометрии

$$a = c \sin A, \quad b = c \sin B$$

тем, что стороны треугольника a, b, c заменены через $\operatorname{ctg} \Pi(a)$, $\operatorname{ctg} \Pi(b)$, $\operatorname{ctg} \Pi(c)$.

Как известно, Непером было указано мнемоническое правило, дающее возможность без труда запомнить соотношения между сторонами и углами прямоугольного сферического треугольника. Проф. А. П. Котельников показал, что это правило в несколько измененном виде может служить и для записывания тригонометрических уравнений прямоугольного треугольника в плоскости Лобачевского [1]).

[205] Эти уравнения выведены в предыдущем примечании (там они приведены под номерами 8 и 6).

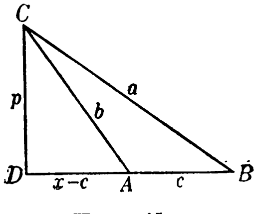
[206] Если это соотношение написать в виде

$$\frac{\operatorname{ctg} \Pi(a)}{\sin A} = \frac{\operatorname{ctg} \Pi(b)}{\sin B},$$

то оно наиболее напоминает «теорему синусов» евклидовой тригонометрии.

[207] Обозначения формул [а], [б] и [в] вставлены нами для удобства ссылки на них в примечаниях; это и отмечено прямоугольными скобками.

[208] В этом случае $c - x = 0$, $\Pi(c - x) = \frac{1}{2}\pi$, а потому обе части второго уравнения обращаются в нуль.



Черт. 45.

[209] Если A есть тупой угол (черт. 45), то мы обозначим через x расстояние BD от вершины угла B до основания перпендикуляра p; тогда $AD = x - c$. Из тре-

1) См. Н. И. Лобачевский, Полн. собр. соч., т. I, примечание [20] к сочинению «О началах геометрии» (стр. 275—276).

угольника CAD в силу уравнения (2) мы тогда получаем:

$$\cos \Pi (x - c) = \cos \Pi (b) \cos (\pi - A)$$

или

$$\cos \Pi (c - x) = \cos \Pi (b) \cos A.$$

Точно так же из треугольника CBD находим:

$$\cos \Pi (x) = \cos \Pi (a) \cos B.$$

Оба эти уравнения получаются из тех двух основных уравнений [а], которые Лобачевский устанавливает (в тексте), если заменить x на $c - x$ и обратно. Важно здесь то, что два основных соотношения [а] имеют место во всяком треугольнике при надлежащем выборе отрезка x.

[210] В предложении 36 было найдено основное соотношение $\operatorname{tg} \frac{1}{2} \Pi (x) = e^{-x}$, устанавливающее функцию $\Pi (x)$. Лобачевский прежде всего по известной гониометрической формуле выражает $\cos \Pi (c - x)$ через $\operatorname{tg} \frac{1}{2} \Pi (c - x)$ и получает вторую часть равенства [б]. Затем по упомянутой формуле он заменяет $\operatorname{tg} \frac{1}{2} \Pi (c - x)$ через e^{x-c} и получает третью часть этого равенства. Теперь он представляет член e^{2x-2c} в виде $e^{2x} \cdot e^{-2c}$, выражает обратно оба множителя через $\left[\operatorname{ctg} \frac{1}{2} \Pi (x)\right]^2$ и $\left[\operatorname{tg} \frac{1}{2} \Pi (c)\right]^2$ и, таким образом, получает четвертую часть равенства; наконец, выражая тангенсы половинных углов по хорошо известной формуле через косинусы целых углов, он получает последний член равенства.

Это имеет двоякое значение. Во-первых, формула

$$\cos \Pi (c - x) = \frac{\cos \Pi (c) - \cos \Pi (x)}{1 - \cos \Pi (c) \cos \Pi (x)}$$

устанавливает для функции $\Pi (x)$ теорему сложения. Она остается в силе и для отрицательных значений x, что дает

$$\cos \Pi (c + x) = \frac{\cos \Pi (c) + \cos \Pi (x)}{1 + \cos \Pi (c) \cos \Pi (x)}\ ^{1)}.$$

Во-вторых, выражая здесь $\cos \Pi (x)$ и $\cos \Pi (c - x)$ по формулам [а], Лобачевский получает основные формулы [в], связывающие в гиперболическом пространстве стороны и углы любого прямолинейного треугольника. Однако, подобно так называемым неперовым аналогиям сферической тригонометрии, каждое из этих уравнений содержит пять элементов треугольника; между тем, для решения треугольника их должно быть только четыре. Лобачевский переходит поэтому к установлению уравнений, связывающих четыре элемента треугольника.

---

1) Эта формула приведена под номером (64) в сочинении «Новые начала геометрии с полной теорией параллельных» (Н. И. Лобачевский, Полн. собр. соч., т. II, стр. 321).

[211] Написав предыдущее соотношение в виде

$$1 - \cos \Pi (b) \cos \Pi (c) \cos A = \frac{\cos \Pi (c) - \cos A \cos \Pi (b)}{\cos \Pi (a) \cos B}, \qquad (1)$$

мы транспонируем в нем стороны a и b, а также противолежащие им углы A и B, получим:

$$1 - \cos \Pi (a) \cos \Pi (c) \cos B = \frac{\cos \Pi (c) - \cos B \cos \Pi (a)}{\cos \Pi (b) \cos A}.$$

Перемножая эти равенства, получим:

$$[1 - \cos \Pi (a) \cos \Pi (c) \cos B] \, [1 - \cos \Pi (b) \cos \Pi (c) \cos A] =$$
$$= \frac{[\cos \Pi (c) - \cos B \cos \Pi (a)] \, [\cos \Pi (c) - \cos A \cos \Pi (b)]}{\cos \Pi (a) \cos \Pi (b) \cos A \cos B}.$$

Выполнив в числителе правой части умножение и разделив член, не содержащий $\cos \Pi (c)$, на знаменатель, приведем правую часть к виду

$$1 + \frac{\cos \Pi (c) \, [\cos \Pi (c) - \cos A \cos \Pi (b) - \cos B \cos \Pi (a)]}{\cos \Pi (a) \cos \Pi (b) \cos A \cos B} =$$
$$= \sin^2 \Pi (c) + \frac{\cos \Pi (c) \cdot R}{\cos \Pi (a) \cos \Pi (b) \cos A \cos B},$$

где через R обозначено выражение

$$\cos \Pi (c) \, [1 + \cos A \cos B \cos \Pi (a) \cos \Pi (b)] - \cos \Pi (a) \cos B - \cos \Pi (b) \cos A.$$

Вследствие соотношения (1) R обращается в нуль, и мы получаем уравнение, приведенное в тексте.

[212] Извлечение корня не приводит к двузначности потому, что полученные в результате выражения

$$\frac{\sin \Pi (b) \sin \Pi (c)}{\sin \Pi (a)} \quad \text{и} \quad 1 - \cos A \cos \Pi (b) \cos \Pi (c)$$

имеют положительные значения.

[213] Это есть уравнение (3):

$$\sin A \operatorname{ctg} \Pi (a) = \sin C \operatorname{tg} \Pi (c),$$

взятое для сторон a и c противолежащих углов A и C.

[214] Подстановку эту нужно сделать не в первое уравнение (4), а в следующее, выражающее $\sin^2 \Pi (b)$. Вычисление протекает в следующем порядке:

$$1 - \cos A \cos \Pi (b) \cos \Pi (c) =$$
$$= 1 - \frac{\cos A \cos \Pi (b) \cos \Pi (a) \sin C}{\sin A \sin \Pi (b) + \cos A \sin C \cos \Pi (a) \cos \Pi (b)} =$$
$$= \frac{\sin A \sin \Pi (b)}{\sin A \sin \Pi (b) + \cos A \sin C \cos \Pi (a) \cos \Pi (b)}.$$

Вместе с тем уравнение, выражающее $\sin^2 \Pi(b)$, после подстановки и сокращения на $\sin \Pi(b)$ примет вид

$$\sin \Pi(b) = \frac{\sin A \{1 - \cos C \cos \Pi(a) \cos \Pi(b)\}}{\sin A \sin \Pi(b) + \cos A \sin C \cos \Pi(a) \cos \Pi(b)}$$

или же

$$\sin A - \sin A \cos C \cos \Pi(a) \cos \Pi(b) =$$
$$= \sin A \sin^2 \Pi(b) + \sin \Pi(b) \cos A \sin C \cos \Pi(a) \cos \Pi(b).$$

Заменив теперь разность первых членов обеих частей через $\sin A \cos^2 \Pi(b)$ и разделив обе части на $\sin A \cos \Pi(a) \cos \Pi(b)$, получим уравнение, приведенное в тексте.

[215] Иначе говоря, мы подставляем в предыдущее уравнение вместо $\sin \Pi(b)$ выражение, которое дает уравнение (3):

$$\sin \Pi(b) = \frac{\sin A \operatorname{tg} \Pi(a) \cos \Pi(b)}{\sin B}.$$

Это дает непосредственно

$$\frac{\cos A \operatorname{tg} \Pi(a) \cos \Pi(b) \sin C}{\sin B} + \cos C = \frac{\cos \Pi(b)}{\cos \Pi(a)}.$$

Умножая же обе части на $\frac{\cos \Pi(a)}{\cos \Pi(b)}$, получим уравнение, приведенное в тексте.

Далее Лобачевский транспонирует стороны a и b, а соответственно этому и углы A и B.

[216] Эта формула получается исключением отношения $\frac{\cos \Pi(a)}{\cos \Pi(b)}$ из двух предыдущих уравнений.

[217] Было бы точнее сказать не «четыре уравнения», а четыре группы уравнений.

Уравнений первой группы имеется три (из них два независимых). Каждое из этих уравнений дает возможность по двум сторонам и углу, противолежащему одной из них, определить угол, противолежащий второй стороне, или же по двум углам и стороне, противолежащей одному из них, определить сторону, противолежащую второму углу.

Три уравнения второй группы определяют углы треугольника по трем его сторонам. Каждое из уравнений этой группы может также служить для определения третьей стороны по двум сторонам и одному углу.

Уравнений третьей группы имеется шесть; каждое из них служит для определения по стороне и двум прилежащим к ней углам стороны, противолежащей одному из этих углов, или же по углу и двум содержащим его сторонам — угла, противолежащего одной из этих сторон.

Четвертая группа содержит три уравнения и служит для определения сторон треугольника по его углам.

Все три группы содержат, таким образом, 15 уравнений, исчерпывающих тригонометрию прямолинейного треугольника.

Эти уравнения составляют так называемую *полную систему тригонометрических уравнений прямолинейного треугольника*. Уравнений первого типа есть три, второго и третьего также по три, а четвертого типа — шесть, всего пятнадцать. Каждое из этих уравнений содержит по четыре элемента треугольника, и их совокупность (число которых совпадает с числом сочетаний из шести элементов по четыре) дает возможность определить каждый элемент треугольника по любой комбинации трех других элементов.

Эти уравнения (8) приведены Лобачевским уже в первом опубликованном им мемуаре «О началах геометрии» под номером (17) [1]). Однако полного их вывода там не дано; указано только, что они могут быть выведены совершенно так же, как 15 уравнений сферического треугольника могут быть выведены из шести, которые он считал основными. В «Воображаемой геометрии» этот вывод приведен в несколько более сжатом изложении [2]); он повторен в статье 142 сочинения «Новые начала геометрии» [3]).

В случае прямоугольного прямолинейного треугольника система сводится к десяти уравнениям.

[218] Установленное в предложении 36 соотношение $\operatorname{ctg}\frac{1}{2}\Pi(x)=e^x$ дает

$$\operatorname{ctg}\Pi(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{2},\quad \sin\Pi(x)=\frac{2}{e^x+e^{-x}},\quad \cos\Pi(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}.$$

Выражая правые части в гиперболических функциях, представим эти уравнения в следующем виде:

$$\operatorname{ctg}\Pi(x)=\operatorname{sh}x,\quad \sin\Pi(x)=\frac{1}{\operatorname{ch}x},\quad \cos\Pi(x)=\operatorname{th}x.$$

Гиперболические функции играют, таким образом, в неевклидовой геометрии Лобачевского такую же роль, какую в обыкновенной геометрии играют тригонометрические функции. Поэтому построенную Лобачевским систему геометрии, как уже упомянуто выше, называют *гиперболической геометрией* (см. примечание [109]).

Разлагая гиперболические функции в ряд Маклорена и сохраняя для малых значений x только члены не выше второго порядка, получим выражения, приведенные в тексте.

---

1) Н. И. Лобачевский, Полн. собр. соч., т. I, стр. 206.

2) Там же, т. III, стр. 19—23.

3) Там же, т. II, стр. 332—334.

[219] Первое из этих соотношений получаем непосредственно из первого уравнения (8), написав его в виде

$$\operatorname{ctg} \Pi(b) \sin A = \operatorname{ctg} \Pi(a) \sin B$$

и заменяя $\operatorname{ctg} \Pi(b)$ и $\operatorname{ctg} \Pi(a)$ приведенными их приближенными значениями a и b. Второе уравнение (8) после подстановки в него приближенных значений принимает вид

$$bc \cos A + \frac{\left(1-\frac{b^2}{2}\right)\left(1-\frac{c^2}{2}\right)}{1-\frac{a^2}{2}} = 1.$$

Освобождаясь от знаменателя и отбрасывая члены, порядок которых выше двух, получим второе уравнение, приведенное в тексте.

Третье уравнение (8) после такой же подстановки примет вид

$$\frac{\operatorname{ctg} A \sin C}{1-\frac{b^2}{2}} + \cos C = \frac{b}{a}.$$

Освобождая от знаменателя, отбрасывая члены, порядок которых выше двух, и умножая обе части уравнения на $\sin A$, получим третье уравнение текста. Аналогично получаем и четвертое.

[220] Это соотношение, строго говоря, вытекает уже из последнего уравнения. Чтобы получить его, однако, как указывает Лобачевский, опираясь на предыдущие уравнения, проведем вывод в следующем порядке:

$$\sin(A+B+C) = \sin A \cos(B+C) + \cos A \sin(B+C).$$

Заменяя здесь согласно последней формуле $\cos(B+C)$ через $-\cos A$, получаем:

$$\sin(A+B+C) = \cos A \{\sin(B+C) - \sin A\}.$$

Заменяя теперь $\sin(B+C)$ его значением, заимствованным из предпоследнего уравнения той же группы (с заменой A на B), получим:

$$\sin(A+B+C) = \frac{\cos A}{b}\{a \sin B - b \sin A\}.$$

Согласно же первому уравнению той же группы, выражение, стоящее в скобках в правой части этого равенства, равно нулю. Поэтому $\sin(A+B+C) = 0$; а так как $A+B+C$ больше нуля и не превышает π, то $A+B+C = \pi$.

[221] Более того, воображаемая геометрия переходит в обыкновенную, если стороны настолько малы, что можно пренебречь кубом и более высокими степенями отношения каждой стороны к принятой единице меры.

Это очень важное предложение, согласно которому гиперболическая геометрия бесконечно малого совпадает с евклидовой геометрией; оно нуждается в пояснении.

Числа, которыми выражаются длины отрезков, зависят от принятой единицы меры. Эта единица меры, однако, не произвольна: она зафиксирована тем требованием, чтобы в уравнении $\operatorname{ctg}\frac{1}{2}\Pi(x)=e^x$ число e представляло собой основание неперовых логарифмов (см. предложение 36 и примечание [203]; это имеет место при строго определенном размере отрезка. Как уже было указано выше (стр. 296), этот отрезок часто называют теперь *радиусом кривизны* гиперболического пространства. Итак, гиперболическая геометрия совпадает с евклидовой на протяжении весьма малом по сравнению с радиусом кривизны пространства.

С этим и связываются соображения, относящиеся к устройству Вселенной. Уже Лобачевский в очень осторожной форме высказывал предположение, что в нашем пространстве в действительности, может быть, имеет место гиперболическая геометрия, но что размеры той части Вселенной, в которой мы производим наши измерения, настолько малы по сравнению с радиусом кривизны пространства, что отклонения наблюдаемых нами метрических соотношений от евклидовых весьма ничтожны: они падают за пределы точности наших измерений[1]). Вычисления суммы углов в некотором космическом треугольнике не дали оснований к подтверждению такого предположения. В настоящее время размеры Вселенной, доступные наблюдению, неизмеримо больше, чем это было в эпоху, когда жил Лобачевский. Протяжения, доступные точному измерению, действительно совершенно ничтожны по сравнению с размерами Вселенной. В связи с этим, а также с некоторыми течениями в физике и космологии в последнее время чаще высказываются предположения, что действительная геометрия космоса не евклидова (Эйнштейн, Вейль). Нужно, однако, сказать, что на эти соображения можно смотреть только как на весьма проблематические предположения, требующие еще тщательной проверки.

[222] Лобачевский имеет в виду сочинения: «О началах геометрии», напечатанное, правда, не в «Ученых записках», а в «Казанском вестнике» (1829—1830), «Воображаемая геометрия», напечатанное в «Ученых записках Казанского университета» за 1835 год, «Применение воображаемой геометрии к некоторым интегралам», напечатанное в «Ученых записках» за 1836 год.

Дальнейшие слова Лобачевского: «Как я показал в одной из моих работ ...» относятся к его сочинению «О началах геометрии»[2]).

[223] Функция $\Pi(x)$ определена Лобачевским геометрически, а затем установлено ее аналитическое выражение, содержащееся в заключи-

---

[1]) См. сочинения «О началах геометрии» (Н. И. Лобачевский, Полн. собр. соч., т. I, стр. 207—209) и «Пангеометрия» (см. стр. 216—217 этой книги).

[2]) См. предыдущую сноску.

тельной формуле предложения 36; в примечании [218] это же соотношение приведено в других видах.

Если функции, определяемые этими формулами, распространить и на мнимые значения аргумента, то получим:

$$\operatorname{ctg} \Pi(xi) = \frac{e^{xi} - e^{-xi}}{2} = i \sin x,$$

$$\sin \Pi(xi) = \frac{2}{e^{xi} + e^{-xi}} = \frac{1}{\cos x},$$

$$\cos \Pi(xi) = \frac{e^{xi} - e^{-xi}}{e^{xi} + e^{-xi}} = i \operatorname{tg} x.$$

Эти именно формулы Лобачевский и приводит в тексте. Если в уравнения (8) вместо a, b, c подставить ai, bi, ci и выразить тригонометрические функции от $\Pi(ai)$, $\Pi(bi)$, $\Pi(ci)$ по приведенным выше формулам, то получим заключительные уравнения текста. Это суть соотношения между сторонами и углами сферического треугольника. Можно сказать, что и обратно: формулы сферической тригонометрии переходят в уравнения гиперболической тригонометрии, если заменить стороны треугольника a, b, c через $\frac{a}{i}$, $\frac{b}{i}$, $\frac{c}{i}$. С другой стороны, в сферической тригонометрии под a, b, c разумеют угловые значения сторон; если под a, b, c разуметь длины этих сторон, то угловые их значения будут $\frac{a}{R}$, $\frac{b}{R}$, $\frac{c}{R}$, где R — радиус сферы. Уравнения сферической тригонометрии, содержащие эти формулы, переходят в гиперболические, если заменим $\frac{a}{R}$, $\frac{b}{R}$, $\frac{c}{R}$ через $\frac{a}{Ri}$, $\frac{b}{Ri}$, $\frac{c}{Ri}$, т. е. если заменить R через Ri. Можно сказать, что уравнения гиперболической тригонометрии имеют место на мнимой сфере. В этом именно смысле слова Ламберта: «гипотеза острого угла должна иметь место на какой-либо мнимой сфере» [1]), высказанные им еще в 1766 году, действительно имеют характер замечательного предвидения.

Сфера радиуса R имеет кривизну $\frac{1}{R^2}$. С другой стороны, формулы гиперболической тригонометрии получаются, если в формулах сферической тригонометрии заменить R через ki. В этом смысле на гиперболическую плоскость можно формально смотреть как на сферу с кривизной $K = -\frac{1}{k^2}$; это и служило основанием для присвоения гиперболическому пространству кривизны $-\frac{1}{k^2}$. Более глубокое обоснование этот термин получает в римановой геометрии, в широком смысле этого слова [2]).

---

[1]) См. В. Ф. Каган, Лобачевский и его геометрия, М., 1955, стр. 163.

[2]) См. В. Ф. Каган, Геометрические идеи Римана и их современное развитие, М.—Л., 1933, стр. 14.

ПАНГЕОМЕТРИЯ

Лобачевский, конечно, понимал, что из всех его сочинений по неевклидовой геометрии доступными были только два: «Новые начала геометрии» и «Геометрические исследования». Но обе эти работы, столь различные по характеру выполнения, содержали только первую ступень «воображаемой геометрии» — элементарную геометрию, которая заканчивалась выводом основных уравнений для косоугольного треугольника и сравнением их с формулами сферической геометрии. За пределами обоих сочинений остались вычисления длин и площадей даже простейших фигур, свойства трипрямоугольников, элементы аналитической и дифференциальной геометрии, общие способы измерения длин, площадей, поверхностей и объемов, применения воображаемой геометрии к вычислению определенных интегралов. Эти вопросы были рассмотрены Лобачевским в сочинениях «О началах геометрии», «Воображаемая геометрия», «Применение воображаемой геометрии к некоторым интегралам», но они были изложены очень сжато и практически недоступно; комментирование этих работ было огромным трудом, сделанным в основном германскими и советскими учеными: Ф. Энгелем, Г. Либманом, В. Ф. Каганом, А. П. Котельниковым, А. П. Норденом и Б. Л. Лаптевым. Лобачевский имел все основания тревожиться, что все эти вопросы останутся в забвении после его смерти.

Возможно, что эти соображения руководили Лобачевским, когда он принялся за свой «последний подвиг, последнюю дань созданной им науке и его родному университету»[1]. Ослепший и больной, он диктует своим ученикам «Пангеометрию», которая должна содержать краткое, но доступное изложение «второй ступени» его геометрической системы и одновременно — окончательную обработку ее основ.

И следует признать, что Лобачевский в значительной мере достиг своей цели. Из всех его сочинений, посвященных более сложным вопросам неевклидовой геометрии, «Пангеометрия», конечно, наиболее

---

[1] Из воспоминаний Н. П. Вагнера о Лобачевском, Модзалевский, стр. 651.

доступное. В изложении «Пангеометрии» чувствуется мастер, написавший «Геометрические исследования». Если бы Лобачевский имел возможность взглянуть на свое последнее сочинение и подвергнуть его окончательной отделке, изготовить чертежи, привести в вид, удобный для чтения, то мы имели бы такое же изложение второй части геометрии Лобачевского, каким остаются «Геометрические исследования» для ее первой части. Но это было для Лобачевского уже невозможно; в небольшой степени, чисто внешними средствами это сделано при подготовке сочинения к «Полному собранию сочинений» и к настоящему изданию.

Сочинение «Пангеометрия» разделено редакцией Полного собрания сочинений Лобачевского на 28 параграфов — «статей». В настоящем издании эти статьи объединены в 14 глав и каждой из них дано название. Оно в основном соответствует содержанию главы, хотя полной точности добиться не удалось.

Все сочинение разделяется на три части и заключение.

Первая часть содержит элементарный материал, имеющийся и в «Геометрических исследованиях». К ней относятся главы I—V. Лобачевский считает, что читатель «Пангеометрии» хорошо знаком с «Геометрическими исследованиями»: в главах I и II содержатся только результаты без выводов со ссылками на предложения из «Geometr. Unters.». В конце первой главы появляется название «*Пангеометрия*»; этим именем Лобачевский хотел отметить ее всеобъемлющий характер, «потому что это название означает геометрию в обширном виде, где обыкновенная геометрия будет частный случай».

Главы III, IV и V почти полностью соответствуют главам IX, X и XI «Геометрических исследований» — им приданы те же названия. Но в деталях между обоими сочинениями есть и существенные различия; они отмечены в примечаниях.

Ко второй части можно отнести главы VI и VII. Это — дополнительные сведения из элементарной геометрии, которые не были включены в «Геометрические исследования»: координаты на плоскости и уравнения простейших линий (окружность, предельная линия, прямая), вычисление элементарными средствами длины окружности и предельной линии, свойства четырехугольников с тремя прямыми углами (трипрямоугольников) и, наконец, замечательное свойство расходящихся прямых — существование общего перпендикуляра. В основном этот материал повторяет соответствующие места сочинения «О началах геометрии», но во многом он значительно переработан и — надо сказать — более удачно. Особенно интересно доказательство совпадения двух основных неевклидовых констант E и e в конце главы VII.

Последняя, наиболее существенная часть сочинения содержит инфинитезимальные вычисления длин, площадей и объемов на основе метрической формы. К ней относятся главы VIII—IX и XII—XIII (главы X и XI носят вспомогательный характер). В этих главах методом интегрирования определены длины, площади и объемы элементарных фигур и тел и приведены примеры применения полученных результатов к вычислению некоторых определенных интегралов.

Очень интересны соображения, относящиеся к формуле, выражающей площадь треугольника в неевклидовой плоскости. В первом своем мемуаре «О началах геометрии» Лобачевский устанавливает элементарными геометрическими соображениями, что площадь треугольника пропорциональна его угловому дефекту, а при надлежащем выборе единицы площади она выражается этим дефектом. В сочинении «Воображаемая геометрия» Лобачевский получает площадь прямоугольной прямолинейной трапеции, интегрируя выражение элемента площади в ортогональных (декартовых) координатах. Здесь, в «Пангеометрии», Лобачевский сначала приходит к тому же результату, интегрируя элемент площади, выраженный в полярных координатах. Вслед за тем (в гл. XI) Лобачевский дает выражение площади треугольника в зависимости от трех его сторон, очень своеобразное полученное с большим искусством; оно дает ему возможность показать, что и выражение площади треугольника совпадает с евклидовым, когда стороны треугольника бесконечно малы. Нужно удивляться тому искусству, с которым выполнено это вычисление без всякой записи.

Лобачевский включил в «Пангеометрию» очень небольшую часть результатов, связанных со своими интегральными вычислениями. Отбор сделан им очень продуманно, без лишних сложностей—только для того, чтобы выяснить принципиальные стороны задачи и получить важнейшие формулы. Но в одном случае он не остановился перед сложностью выкладок — при вычислении площади сферы с помощью угловых координат. Такое исключение сделано Лобачевским, вероятно, сознательно: указанное вычисление приводит Лобачевского к новому интегралу — тому самому, который Остроградский считал неверным и который был осмеян в издевательской рецензии в «Сыне Отечества». В последней работе Лобачевский отстаивал свою правоту.

Заключение посвящено основным вопросам, всегда наиболее интересовавшим Лобачевского, — о логической правильности созданной им геометрии и о геометрии реального пространства. И это заключение обнаруживает, что за тридцать лет, протекших со времени первого его доклада физико-математическому отделению Казанского университета, его взгляды на этот вопрос нисколько не изменились. Он попрежнему стоит на той точке зрения, что логического противоречия

в его системе нет и быть не может, — что вопрос о том, какая геометрия действительно имеет место в пространстве, может быть решен только экспериментально, — но «воображаемая геометрия» может быть во всяком случае полезна в различных разделах математического анализа.

Лобачевский близко подошел к доказательству непротиворечивости воображаемой геометрии. Однако полное доказательство справедливости этого утверждения, как и новые разнообразные применения неевклидовой геометрии к анализу, было дано позже.

Что же касается геометрии реального пространства, то Лобачевский, не удовлетворясь своим выводом, сделанным в 1829 году в сочинении «О началах геометрии», пытается в последних строках «Пангеометрии» наметить другой путь решения этого вопроса.

I. Вступление

Вступление к своему последнему сочинению Лобачевский написал сжато, но очень выразительно. В первых же словах он высказывает убеждение, которого придерживался всю свою творческую жизнь [1]: недопустимо строить геометрию на «произвольных» положениях, высказанных «прямо» (в виде аксиом подобно Евклиду) или «косвенно» (подобно тем, кто пытался исправить Евклида), на таких определениях, которые не связаны с их происхождением, из которых даже не видно, что эти понятия «существовать могут». Допущения, равносильные аксиоме о параллельных линиях, обычные определения прямой и плоскости не могут быть поэтому положены в основы геометрии.

Лобачевский кратко напоминает, как он «предпочел начать» геометрию. Его построение геометрии было намечено еще в «Обозрении 2» (1824), развито в сочинениях «Краткое изложение начал геометрии со строгим доказательством теоремы о параллельных» (1826) и «О началах геометрии» (1829) и обстоятельно изложено в фундаментальном труде «Новые начала геометрии с полной теорией параллельных» (1835—1838). Он приводит свое определение параллельности, не зависящее от единственности прямой, проходящей через данную точку и не встречающей данную прямую:

> «Прямую, проведенную из данной точки в плоскости, я называю *параллельною* к данной прямой в той же плоскости, как скоро она составляет границу между теми прямыми, проведенными из той же точки в той же плоскости, которые пересекают

[1] Оно было высказано еще в 1822 году в «Обозрении I» (см. Модзалевский, стр. 203—204).

данную прямую по достаточному продолжению, и тех, которые не пересекает сколько бы не продолжались» [1]).

Далее Лобачевский указывает, что в своем сочинении «Геометрические исследования по теории параллельных линий» он привел доказательства всех предложений, не опирающихся на понятие параллелизма. Это не совсем так: большинство предложений абсолютной геометрии помещено в «Геометрических исследованиях» без доказательства. Но это — первые 15 очевидных или легко доказуемых предложений, имеющихся в любом учебнике геометрии. Три же замечательных предложения, которые Лобачевский приводит во «Вступлении», он действительно доказал в «Геометрических исследованиях» и даже раньше в своих предыдущих сочинениях; это — предложение 19 «сумма углов в прямолинейном треугольнике не превышает двух прямых», предложение 20: «если эта сумма равна двум прямым в одном каком-либо прямолинейном треугольнике, то она такова же и во всех других» и, наконец, предложение 27, особенно отмечаемое Лобачевским: площадь сферического треугольника пропорциональна его угловому избытку [2]). Это — не шаблонные теоремы обычного учебника — они составляют переход от евклидовой геометрии к пангеометрии.

Можно основать, заканчивает Лобачевский, особую геометрию — «геометрию в обширном виде, где обыкновенная геометрия будет частный случай».

Слово «*Пангеометрия*», т. е. «всеобщая геометрия», появляется здесь у Лобачевского в первый раз.

[224] «Содержанием» Лобачевский всегда называет *отношение*.

[225] См., например, «Новые начала геометрии с полной теорией параллельных». Определение сферы дано в статье 13 этого сочинения [3]).

[226] *Geometrische Untersuchungen* — «Геометрические исследования по теории параллельных линий» — сочинение Лобачевского, напечатанное в этой книге.

[227] То есть площадь сферического треугольника, выраженная в частях всей сферы. В следующей формуле множитель $\frac{1}{2}$ появляется

---

1) Стр. 138 этой книги.

2) См. «Геометрические исследования», стр. 102—104 и 112—114 этой книги. Предложение 27 формулировано Лобачевским несколько иначе, чем здесь и во «Вступлении» к «Пангеометрии», но все три формулировки равносильны. См. примечание [147].

3) Н. И. Лобачевский, Полн. собр. соч., т. II, стр. 180. См. также примечания [27] и [28] на стр. 472—473 II тома.

потому, что Лобачевский выражает площадь всей сферы не числом 4π, как принято обычно, а числом 2π в особых единицах. Об этом см. примечание [32] к сочинению «Геометрия».

II. Основные предложения

Лобачевский предполагает, что читатель «Пангеометрии» уже знаком с его сочинением «Геометрические исследования по теории параллельных линий», и поэтому первые положения новой геометрии он излагает сжато, только намечая их доказательства. В настоящей главе собраны те сведения по неевклидовой геометрии, которые в «Геометрических исследованиях» были подробно рассмотрены и доказаны: понятия об угле параллельности, предельной линии и предельной поверхности и основные их свойства. Только в конце главы появляется новый материал по сравнению с «Геометрическими исследованиями» (о площадях фигур, ограниченных предельными линиями), но он очень связан с предыдущим текстом. Следующие три главы III, IV и V будут содержать сведения по неевклидовой геометрии, также известные читателю «Геометрических исследований».

Глава разбита на две статьи 2 и 3 [1]). В ст. 2 кратко изложен тот материал, который содержится в предложениях 16, 23, 25, 28, 31, 32 и 34 «Геометрических исследований»; большей частью (не всегда!) Лобачевский в соответствующем месте ссылается на эти предложения; читателю рекомендуется просмотреть их перед чтением настоящей главы.

Статья 3 посвящена измерению длин дуг предельных линий и ограниченных ими площадей. Вначале приводится без доказательства предложение 24 «Геометрических исследований» о том, что параллельные линии сближаются в сторону их параллелизма. Затем следует с подробным доказательством предложение 33 «Геометрических исследований» об отношении длин S и S' двух дуг предельных линий между двумя общими осями — выводится формула $S' = SE^{-x}$, где x есть расстояние между дугами, считаемое по оси. Следует обратить внимание на то, что в этой формуле Лобачевский обозначает константу — основание степени — через E, в то время как в «Геометрических исследованиях» он обозначал ее через e и замечал, что при соответствующем выборе единицы измерения длины эту константу можно считать неперовым числом 2,71828 ... [2]). Такое различие не

---

1) Термином «статья» для обозначения рубрики Лобачевский пользуется в «Новых началах геометрии с полной теорией параллельных». Напоминаем, что у самого Лобачевского нет никакой разбивки текста «Пангеометрии» на главы и статьи; статьи введены редакцией Полного собрания сочинений Лобачевского (см. т. III, стр. 433), а главы — при подготовке к изданию этой книги.

2) См. стр. 120 этой книги.

случайно: позже, в конце главы VI [1]), выяснятся важные причины для нового обозначения константы.

Во второй половине ст. 3 выводится аналогичная формула для отношения площадей двух фигур, ограниченных предельными линиями и их осями, а из нее — важная формула

$$P = \frac{ES}{E-1}$$

для площади фигуры безграничного протяжения между дугой предельной линии и двумя осями, исходящими из ее концов. Эта формула будет использована в дальнейшем (в гл. IX).

[228] Кроме предложения 23 «Геометрических исследований», на которое ссылается здесь Лобачевский, основное содержание этого абзаца имеется в предложении 16 [2]).

[229] Лобачевский называет эту важную кривую в различных своих сочинениях по-разному. В первом опубликованном им сочинении «О началах геометрии» он назвал ее *предельная круга*, в «Новых началах геометрии» — *предельная кривая* или просто *предельная*, в «Геометрических исследованиях» — *предельная линия* (Grenzlinie), наконец, в «Пангеометрии» — *предельный круг* [3]).

[230] В этом абзаце кратко изложено содержание предложений 31 и 32 «Геометрических исследований» [4]).

[231] «Обращение» — т. е. вращение. Начиная с этого места, весь текст до конца ст. 3 составляет содержание предложения 34 «Геометрических исследований» [5]).

[232] *Предельная сфера* — этот же термин Лобачевский применял и в сочинении «О началах геометрии». В «Новых началах геометрии» и в «Геометрических исследованиях» он вводит термин *предельная поверхность* (Grenzfläche) [6]).

[233] В «Геометрических исследованиях» Лобачевский называл эту плоскость *главной* [7]).

---

1) Стр. 172 этой книги. См. также вводное примечание к главе IV на стр. 274.

2) См. стр. 98 и 106 этой книги.

3) См. Лобачевский, Полн. собр. соч., т. I, стр. 195; т. II, стр. 289—291. Полное собрание сочинений по геометрии, т. II — сочинения на французском и немецком языках, Казань, 1886, стр. 567.

4) См. стр. 118—120 этой книги.

5) См. стр. 121—122 этой книги.

6) Н. И. Лобачевский, Полн. собр. соч., т. I, стр. 195; Полн. собр. соч. по геометрии, т. II, стр. 569.

7) См. стр. 122 этой книги.

[234] Иначе говоря, на предельной поверхности сохраняется двумерная геометрия Евклида; в частности, стороны и углы предельного треугольника связаны уравнениями, которые имеют место в евклидовой геометрии.

[235] Это — предложение 24 «Геометрических исследований» [1]).

[236] См. вводное примечание к этой главе. Вывод этой формулы содержится в предложении 33 «Геометрических исследований» [2]).

[237] Если соединим n таких площадей, как указано на черт. 3 текста Лобачевского, то вся площадь выразится суммой членов геометрической прогрессии

$$P+PE^{-x}+PE^{-2x}+\ldots+PE^{-(n-1)x}$$

и потому имеет указанное в тексте значение.

[238] Если в предыдущем выражении P (верхний четырехугольник на черт. 3 текста Лобачевского) имеет площадь, принятую за единицу и $x=1$, то это выражение принимает вид

$$\frac{1}{1-E^{-1}}=\frac{E}{E-1}.$$

Верхнее основание имеет при этом длину 1; если же длина верхнего основания равна S, то площадь всей полосы имеет значение, указанное в тексте.

III. Уравнения, связывающие стороны и углы прямоугольного треугольника; формулы сферической тригонометрии

Содержание этой главы в основном соответствует содержанию предложения 35 «Геометрических исследований», порядок изложения и даже обозначения в обоих сочинениях во многом совпадают, а дополнительный материал, имеющийся здесь по сравнению с предложением 35, носит второстепенный характер. Перед чтением этой главы целесообразно просмотреть предложение 35 и примечания к ней (в особенности вводное примечание к главе IX «Геометрических исследований») [3]); нижеследующие примечания относятся, главным образом, к дополнительному материалу или к сравнению изложения в «Геометрических исследованиях» и в «Пангеометрии».

---

1) См. стр. 108 этой книги.
2) См. стр. 119 этой книги.
3) Стр. 123—126 и 307—309 этой книги.

Глава содержит две статьи: 4 и 5. В ст. 4 после небольшой вступительной части [1]) изложено преобразование Лобачевского: переход от одного прямоугольного треугольника с элементами a, b, c, α, β к другому с элементами a, α', β, b', c при помощи промежуточного звена — прямоугольного сферического треугольника [2]). Изложение этой статьи отличается от изложения первой части предложения 35 незначительными подробностями.

Статья 5 содержит вывод основных уравнений (2), (3) и (4), связывающих стороны и углы прямоугольного треугольника на плоскости Лобачевского; из них вытекают три основных уравнения (5) для сферического прямоугольного треугольника. Последние уравнения совпадают с известными формулами сферической тригонометрии; ими Лобачевский закончил предложение 35 «Геометрических исследований» и сделал из них справедливое заключение, что законы сферической тригонометрии «не зависят от того, равна ли в прямолинейном треугольнике сумма трех углов двум прямым или нет» [3]). Но здесь, в «Пангеометрии», Лобачевский не ограничивается этим: он выводит из уравнений (5) четыре основные формулы (6), (7), (8) и (9) для косоугольного сферического треугольника. Вывод их составляет заключительную часть главы; он не характерен для геометрии Лобачевского и не отличается от обычного способа разбиения косоугольного треугольника на сумму или разность двух прямоугольных. Для Лобачевского эти четыре формулы имеют особенно важное значение — именно они завершают сочинение «Геометрические исследования» и вытекают из формул (8) этого сочинения умножением сторон треугольника на $\sqrt{-1}$ [4]). Вероятно, поэтому Лобачевский не пожалел здесь труда на их получение и только после этого сделал заключительный вывод об абсолютном характере сферической тригонометрии.

[239] «Двум прямым» — точнее, «двум прямолинейным отрезкам». Иначе говоря, острые углы A и B могут быть в пангеометрии заданы прямолинейными отрезками α и β, для которых $\Pi(\alpha) = A$, $\Pi(\beta) = B$. Эти отрезки — *гиперболические значения* углов A и B [5]).

[240] То есть буквами со штрихами. Отрезок α' часто называют *дополнительным* к отрезку α.

---

[1]) В ней введены обозначения, используемые в дальнейшем: величины α и α' функции $L(a)$ и $f(a)$; современные термины для этих понятий указаны в соответствующих примечаниях.

[2]) Подробнее о преобразовании Лобачевского см. стр. 308 и 311—312 этой книги.

[3]) Стр. 126 этой книги.

[4]) Стр. 134 этой книги.

[5]) См. стр. 310 этой книги.

[241] Лобачевский имеет в виду точку M на черт. 4 — конец («вершину») отрезка AM, имеющего длину a и перпендикулярного к оси AA' предельной линии AB.

[242] Отрезок a часто называют *тангенциальным протяжением* (или *тангенциальной высотой*) дуги AB (черт. 4 текста Лобачевского), а отрезок MB — ее *нормальным протяжением*. Функция $f(a)$ выражает зависимость нормального протяжения дуги от тангенциального; $L(a)$ есть длина всей дуги $\smile{AB}$ — функция ее тангенциального протяжения.

[243] Это построение и связанное с ним рассуждение изложены Лобачевским в § 35 «Геометрических исследований» [1]). Черт. 5 текста Лобачевского, к которому это рассуждение относится, совпадает с черт. 28 «Геометрических исследований»; только буквы m, n, k переставлены. Вместо них соответственно поставлены буквы k, m, n.

[244] Сторона mn измеряется углом B [т. е. $\Pi(\beta)$]. Сторона km измеряется углом $ABB' = \Pi(c)$; сторона kn — углом $CBB' = \Pi(a)$; угол knm есть двугранный угол между плоскостями III и IV; он измеряется своим линейным углом $ACC' = \Pi(b)$.

[245] Так как на предельной поверхности сумма углов треугольника $AB''C''$, составленного предельными линиями, равна π, то $\angle AB''C'' = \frac{\pi}{2} - \angle B''AC''$; но угол $B''AC''$ измеряется углом между касательными к сторонам AB'' и AC'', т. е. между сторонами AB и AC исходного треугольника, — его углом $A = \Pi(\alpha)$; поэтому согласно определению дополнительного отрезка $\angle AB''C'' = \Pi(\alpha')$; но тот же угол измеряет и угол mkn сферического треугольника, как указано в тексте.

[246] Дальнейшее рассуждение и связанное с ним построение представляют собой основу, на которой Лобачевский строит тригонометрию прямоугольного треугольника в своей неевклидовой плоскости. Вывод Лобачевского пояснен в примечании [187] к «Геометрическим исследованиям» [2]). Однако ввиду важности замечательной теоремы, которую Лобачевский здесь приводит, и некоторого отличия его рассуждения от того, которое им дано в «Геометрических исследованиях», рассмотрим его подробнее.

Теорема, доказанная выше, заключается в следующем. Если существует прямолинейный прямоугольный треугольник $\triangle$ с катетами a, b, гипотенузой c и острыми углами $\Pi(\alpha)$ и $\Pi(\beta)$, то ему сопутствует прямоугольный сферический треугольник (σ) с катетами $\Pi(\beta)$, $\Pi(c)$,

---

[1]) См. стр. 123 этой книги.

[2]) См. стр. 311—313 этой книги.

гипотенузой $\Pi(a)$ и острыми углами $\Pi(\alpha')$, $\Pi(b)$. Имея это в виду, Лобачевский по треугольнику $\triangle$ строит другой прямоугольный прямолинейный треугольник $\triangle_1$, в котором сохраняется один катет a исходного треугольника $\triangle$, а другой катет (b) заменяется отрезком α'; гипотенузу этого треугольника Лобачевский предварительно обозначает через g, его острые углы — через $\Pi(\lambda)$ и $\Pi(\mu)$, именно через $\Pi(\lambda)$ — угол, противолежащий катету a, а через $\Pi(\mu)$ — угол, противолежащий катету α'. Получается такая схема:

	Катеты	Гипотенуза	Противолежащие острые углы
Треугольник $\triangle$	a, b	c	$\Pi(\alpha)$, $\Pi(\beta)$
Треугольник $\triangle_1$	a, α'	g	$\Pi(\lambda)$, $\Pi(\mu)$
Сферический тр-к σ	$\Pi(\beta)$, $\Pi(c)$	$\Pi(a)$	$\Pi(\alpha')$, $\Pi(b)$

Таким образом, переход от треугольника $\triangle$ к треугольнику $\triangle_1$ происходит при помощи следующей замены:

$$\begin{matrix} a & b & c & \alpha & \beta \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ a & \alpha' & g & \lambda & \mu. \end{matrix} \qquad (1)$$

Согласно доказанной теореме треугольнику $\triangle_1$ в свою очередь сопутствует сферический треугольник σ_1, стороны и углы которого получаются из сторон и углов треугольника σ замещением (1). Таким образом, стороны и углы сферического треугольника σ_1 суть

Катеты	Гипотенуза	Противолежащие углы
$\Pi(\mu)$, $\Pi(g)$	$\Pi(a)$	$\Pi(\lambda')$, $\Pi(\alpha')$.

Сличая поэтому треугольник σ_1 с σ, видим, что они имеют общую гипотенузу $\Pi(a)$ и общий угол $\Pi(\alpha')$, прилежащий к гипотенузе. Следовательно, эти треугольники конгруэнтны, а потому совпадают и другие соответственные стороны и углы. Прежде всего в σ_1 второй угол $\Pi(\lambda')$, прилежащий к гипотенузе, равен в σ углу $\Pi(b)$, т. е. $\lambda' = b$ ($\lambda = b'$); вместе с тем катету $\Pi(\mu)$, лежащему в σ_1 против угла $\Pi(\lambda')$, соответствует в σ катет, лежащий против угла $\Pi(b)$, т. е. $\Pi(c)$; поэтому $\mu = c$; катет $\Pi(g)$, лежащий в σ_1 против угла $\Pi(\alpha')$, равен катету $\Pi(\beta)$, лежащему против того же угла в треугольнике σ; поэтому $g = \beta$.

Элементы треугольника $\triangle_1$, предварительно обозначенные через λ, μ, g, теперь выявлены:

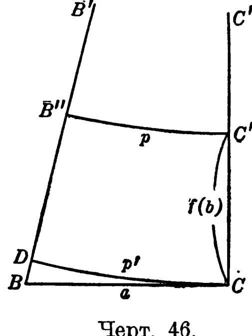
$$\lambda = b', \quad \mu = c, \quad g = \beta.$$

Отсюда следует, что прямолинейному прямоугольному треугольнику $\triangle$ со сторонами a, b, c и острыми углами $\Pi(\alpha)$, $\Pi(\beta)$ всегда

сопутствует другой прямолинейный прямоугольный треугольник $\triangle_1$ с катетами a, α', гипотенузой β и острыми углами $\Pi(b')$ и $\Pi(c)$.

[247] Треугольник $AB''C''$, составленный предельными линиями p, q и r (черт. 5 текста Лобачевского), можно рассматривать как сферический треугольник на сфере с бесконечно удаленным центром. Так как двугранный угол между плоскостями I и III — прямой, то измеряемый им угол $AC''B''$, лежащий против стороны r, также прямой. Угол $B''AC''$, лежащий против стороны p, измеряется углом BAC между касательными к предельным дугам и равен, следовательно, $\Pi(\alpha)$. Наконец, угол $AB''C''$, лежащий против стороны q, дополняет угол $B''AC''$ до прямого (сумма углов предельного треугольника равна π), т. е. равен $\Pi(\alpha')$.

[248] Согласно установленной выше терминологии CC'' есть нормальное, а CA $(=b)$ — тангенциальное протяжение дуги q (черт. 5 текста Лобачевского); поэтому $CC''=f(b)$. Точно так же BB'' есть нормальное, а BA $(=c)$ — тангенциальное протяжение дуги r; поэтому $BB''=f(c)$.



Черт. 46.

[249] Нельзя сказать, чтобы это действительно было «легко видеть». Во всяком случае Лобачевский обстоятельно доказывает это равенство в § 35 «Геометрических исследований» (см. стр. 124—125 этой книги).

[250] Если через точку C (см. черт. 46) в плоскости III проведем предельную дугу $CD=p'$, параллельную $C''B''$, т. е. имеющую с ней общие оси CC' и BB', то по установленной на стр. 143 формуле $p'=pE^{CC''}=pE^{f(b)}$. С другой стороны, так как дуга CD $(=p')$ имеет тангенциальное протяжение a, то $p'=L(a)$, т. е. $pE^{f(b)}=L(a)$.

[251] Согласно доказанной выше основной теореме прямоугольному треугольнику, в котором один катет равен a, а гипотенуза и острые углы суть c, $\Pi(\alpha)$ и $\Pi(\beta)$, соответствует другой прямоугольный треугольник, имеющий тот же катет a, гипотенузу β и острые углы $\Pi(b')$ и $\Pi(c)$. Поэтому равенство (1) остается в силе, если заменить α на b', β на c, а a оставить без изменения.

Тот же прием Лобачевский применяет для получения остальных уравнений (2), (3) и (4).

[252] Правая часть последнего равенства зависит только от гипотенузы (c), а левая часть — от катета, значение которого при данном c

остается произвольным; мы можем поэтому положить $a = 0$. Когда тангенциальное протяжение предельной дуги обращается в нуль, то вместе с ним обращается в нуль и нормальное ее протяжение; это и значит, что $f(0) = 0$.

[253] Уравнения (2), (3) и (4) выведены для *прямолинейного* прямоугольного треугольника со сторонами a, b, c и противолежащими углами $\Pi(\alpha)$, $\Pi(\beta)$, $\frac{\pi}{2}$. Но выше (стр. 146) Лобачевский доказал, что каждому такому треугольнику соответствует *сферический* прямоугольный треугольник со сторонами $\Pi(\beta)$, $\Pi(c)$, $\Pi(a)$ и противолежащими углами $\Pi(\alpha')$, $\Pi(b)$, $\frac{\pi}{2}$. Вводя новые обозначения

$$\begin{array}{ccccc} \Pi(\beta) & \Pi(c) & \Pi(a) & \Pi(\alpha') & \Pi(b) \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ a & b & c & A & B \end{array}$$

получаем из (2), (3) и (4) формулы (5) для этого сферического треугольника.

[254] Таким образом Лобачевский доказал, что соотношения между углами и сторонами в любом сферическом прямоугольном треугольнике не зависят от постулата о параллельных линиях: формулы (5), совпадающие с известными формулами сферической тригонометрии, выведены в предположении, что этот постулат не имеет места.

Заметим, что уравнения (5) сферической тригонометрии можно, конечно, вывести, не опираясь на постулат о параллельных (т. е. не опираясь на евклидову геометрию) и не прибегая также к неевклидовой геометрии [1]). Но самый факт был открыт Лобачевским, как выше изложено, именно средствами неевклидовой геометрии. Вывод очень изящный и дает хороший переход к уравнениям прямолинейного прямоугольного треугольника в плоскости Лобачевского.

Соображения, следующие за формулами (5), представляют собой обычные выводы формул косоугольного сферического треугольника из формул прямоугольного сферического треугольника.

[255] Делим почленно равенство $\cos p\,(\cos c \cos x + \sin c \sin x) = \cos b$ на равенство $\cos p \cos x = \cos a$ и решаем полученное уравнение относительно $\operatorname{tg} x$.

[256] См. предыдущее примечание.

---

[1]) См., например, H. Liebmann, Begründung der sphärischen Trigonometrie unabhängig vom Parallelenpostulat. Sächsische Berichte, 1908.

IV. Разыскание функции $\Pi(x)$

Основная часть этой главы (ст. 6) является почти дословным повторением главы X «Геометрических исследований» (предложения 36)[1]; чертежи 11—14 воспроизводят чертежи 31—34 «Геометрических исследований». Статья содержит вывод аналитического выражения для функции $\Pi(x)$ в неявной форме: $\operatorname{tg}\frac{1}{2}\Pi(x)=e^{-x}$.

Следует обратить внимание на то, что здесь Лобачевский в отличие от главы II (ст. 3) обозначает основание степени через e, а не через E, подчеркивая этим, что это — другая величина. Здесь он говорит, что при соответствующей единице длины можно считать e основанием неперовых логарифмов.

Позже, в конце главы VI, он докажет, что числа E и e совпадают при одной и той же единице длины.

Глава IV оканчивается небольшой ст. 7, отсутствующей в «Геометрических исследованиях». В этой статье даны другие неявные выражения для функции $\Pi(x)$ [$\sin\Pi(x)$ и $\cos\Pi(x)$], а также «формулы сложения и вычитания», т. е. выражения тригонометрических функций от $\Pi(x\pm y)$ через функции от $\Pi(x)$ и $\Pi(y)$.

Глава почти не снабжена примечаниями — читатель найдет их в сочинении «Геометрические исследования».

[257] Так как $AG\|BF$, то $AG\|DE$, и потому $\angle GAD=\Pi(AD)=$ $=\Pi(c+\beta)$ и в то же время $\angle GAC=\Pi(b)$.

[258] «Второму» по отношению к первому продолжению BB' на черт. 11 текста Лобачевского.

[259] В этом именно предположении проведены изложенные выше рассуждения и построения (черт. 12 текста Лобачевского).

[260] Определение функции $\Pi(x)$ для отрицательного аргумента см. на стр. 140 этой книги.

[261] Эти формулы выводятся без труда; в дальнейших примечаниях мы будем называть их «формулами сложения».

V. Уравнения, связывающие стороны и углы всякого треугольника

Эта глава соответствует заключительной главе XI «Геометрических исследований» (предложение 37)[2] и построена по той же схеме.

Сначала (ст. 8) выводятся дополнительные соотношения для прямоугольного треугольника сверх тех, которые были получены в главе III.

---

1) См. стр. 126—129 этой книги.

2) Стр. 130—134 этой книги.

Затем в статье 9 получаются основные четыре соотношения между элементами косоугольного треугольника. Эти формулы (13), (14), (15) и (18) совпадают соответственно с формулами (3), (5), (7) и (6) «Геометрических исследований» и вместе с их модификациями дают полную систему тригонометрических уравнений прямолинейного треугольника [1]); они сведены в группу под общим номером (19) [2]). Вывод их в некоторых местах отличается от вывода, который намечен в «Геометрических исследованиях».

Наконец, в небольшой статье 10 «поверяется» заявление, что «Пангеометрия переходит в обыкновенную геометрию с предположением линий чрезвычайно малых».

Как и в предыдущей главе, здесь дано лишь несколько примечаний, относящихся к вычислительной стороне дела; примечания принципиального характера были сделаны к соответствующим местам сочинения «Геометрические исследования».

[262] Уравнения (2), (3) и (4) на стр. 149—150 связывали стороны и углы прямолинейного треугольника ABC, имеющего стороны a, b, c и противолежащие им углы $\Pi(\alpha)$, $\Pi(\beta)$, $\frac{\pi}{2}$. В формулах (10) Лобачевский повторяет эти уравнения, введя обычные обозначения острых углов: $A = \Pi(\alpha)$ и $B = \Pi(\beta)$.

[263] При $A = \frac{\pi}{2}$ уравнение (13) принимает вид

$$\operatorname{tg}\Pi(a) = \sin B \operatorname{tg}\Pi(b).$$

Однако теперь a есть гипотенуза, которую мы прежде обозначали через c; таким образом, при прежних обозначениях это уравнение можно написать в виде

$$\operatorname{tg}\Pi(c) = \sin B \operatorname{tg}\Pi(b) = \sin A \operatorname{tg}\Pi(a),$$

т. е. оно принимает вид (12). Уравнение (14) при $A = \frac{\pi}{2}$ непосредственно переходит в уравнение (11), если сторону a (теперь гипотенузу) обозначить через c, а вместе с тем сторону c (теперь катет) — через a.

[264] Если в нем предварительно заменить правую часть через $\sin C \operatorname{tg}\Pi(c)$ и написать его в виде

$$\sin^2 A \operatorname{tg}^2\Pi(a) = \sin^2 C \operatorname{tg}^2\Pi(c),$$

---

[1]) См. примечание [217] к «Геометрическим исследованиям» (стр. 324 этой книги).

[2]) В «Геометрических исследованиях» под номером 8 (стр. 133 книги).

то оно даст

$$\frac{1}{\cos^2 \Pi(c)} = \frac{\sin^2 A \operatorname{tg}^2 \Pi(a)}{\sin^2 C \sin^2 \Pi(c)} = \frac{\sin^2 A \operatorname{tg}^2 \Pi(a)}{\sin^2 C} [1 + \operatorname{ctg}^2 \Pi(c)] =$$

$$= \frac{\sin^2 A \operatorname{tg}^2 \Pi(a)}{\sin^2 C} + \frac{\sin^2 A \operatorname{tg}^2 \Pi(a)}{\sin^2 C \operatorname{tg}^2 \Pi(c)}.$$

Так как второй член правой части равен 1, то мы приходим к выражению, данному в тексте.

[265] То есть заменяя в уравнении (14) друг другом стороны a, c и соответственно углы A, C.

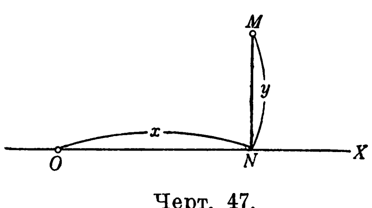
[266] Опять-таки присоединяя третий член, т. е. написав уравнение (13) в виде

$$\sin A \operatorname{tg} \Pi(a) = \sin C \operatorname{tg} \Pi(c).$$

VI. Начала аналитической геометрии. Длина окружности и дуги предельного круга

Начиная с этой главы, в сочинении «Пангеометрия» излагается материал, уже не содержащийся в «Геометрических исследованиях по теории параллельных линий». В основном он был получен Лобачевским в его прежних сочинениях, в первую очередь — в первой напечатанной работе «О началах геометрии».

Глава VI состоит из трех статей: 11, 12 и 13. В первой из них в качестве «примера, каким образом кривые линии определяются помощью координат их точек», выводятся уравнения окружности и предельного круга, во второй — вычисляются длины этих кривых, в третьей — выводятся уравнения прямой линии, как произвольно расположенной относительно системы координат, так и в частных случаях. Все результаты этой главы имеются в сочинении «О началах геометрии» [1]).



Черт. 47.

Поясним систему координат, принятую Лобачевским. Точка M на плоскости определяется двумя координатами: x и y, близкими к прямоугольным декартовым координатам евклидовой геометрии (мы будем называть их *декартовыми координатами*). На прямой OX (черт. 47) — будем ее называть *осью абсцисс* [2]) — фиксируется начальная точка O. Ординатой y точки M на плоскости является длина перпендикуляра MN из этой точки на ось OX, а абсциссой x — расстояние от начала O до проекции N. О знаках координат Лоба-

[1]) Н. И. Лобачевский, Полн. собр. соч., т. I, стр. 210—214.

[2]) Терминов *«абсцисса»* и *«ордината»* Лобачевский не вводит.

чевский ничего не говорит, но он подразумевает их в обычном смысле. Оси ординат Лобачевский не вводит, потому что обе координаты у него не равноправны [1]).

В статье 11 Лобачевский, используя полученные им тригонометрические формулы, находит прежде всего уравнения окружности радиуса r с центром в начале координат [формула (20)] и с центром на оси OX, проходящей через начало [формула (20′)]. Устремляя в последнем уравнении радиус окружности к бесконечности, он получает уравнение предельной круга, проходящей через начало ортогонально к оси OX [формула (20a)]. Это же уравнение Лобачевский находит и другим способом, исходя из определения предельной круга. Вообще получение одного и того же результата различными путями — излюбленный прием Лобачевского; он его многократно использует в дальнейшем.

В статье 12 Лобачевский вычисляет длины простейших кривых линий. Стремясь к краткости, он не приводит в этом сочинении определения длины кривой, но стоит на той же точке зрения (принятой и в настоящее время), которую ввел еще в «Обозрении 1» и осуществил в учебнике «Геометрия» [2]). В сочинении «О началах геометрии» перед изложением этого же материала неевклидовой геометрии Лобачевский говорит:

> «Кривая линия не может быть составлена из прямых, а потому измерение кривой помощию прямой дает только условную величину, за которую обыкновенно принимают границу приближения, когда соединяют прямыми точки на кривой, ближе и ближе друг от друга взятые. Легко видеть, какая цель предположена с таким исчислением. Кривые линии измеряются на самом деле помощию цепи, которая, почитают, тем вернее определяет величину кривой, чем звенья менее; так что гибкая нить дает уже эту величину без приметной погрешности. Надобно,

---

1) В геометрии Лобачевского перпендикуляры MN и MP на оси OX и OY (проведенную под прямым углом к OX; черт. 48) образуют вместе с обеими осями четырехугольник $ONMP$, не являющийся прямоугольником; у него угол при вершине M острый, а противоположные стороны не равны (эта фигура, называемая в настоящее время *трипрямоугольником*, будет рассмотрена Лобачевским в следующих главах). Это обстоятельство и создает неравноправие координат, вводимых Лобачевским. Можно, конечно, рассматривать в качестве координат точки M отрезки ON и OP, но это — уже другая система координат. Об этом см. В. Ф. Каган, Основания геометрии, т. I, М.—Л., 1949, стр. 327.

Черт. 48.

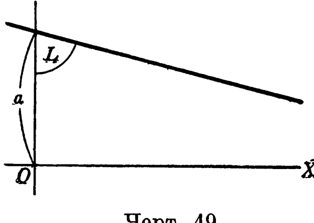
2) См. стр. 35 и 80 этой книги.

следовательно, доказывать только, что граница приближения существует; потом показать, каким образом ее отыскивать» [1]).

Применяя метод интегрирования в элементарной форме, аналогично тому, какой он применял в учебнике «Геометрия» [2]), Лобачевский получает для длины окружности радиуса r выражение $2\pi \operatorname{ctg} \Pi(r)$, а для длины дуги предельной круга с высотой y [3]) — формулу $s = \operatorname{ctg} \Pi(y)$ (22). Наконец, он получает длину той же дуги по ее тангенциальному протяжению t — функцию $L(t)$, введенную еще в главе III [4]):

$$s = L(t) = \cos \Pi(t). \qquad [22a]$$

Статья 13 посвящена уравнению прямой линии. В отличие от сочинения «О началах геометрии» Лобачевский начинает прямо с прямой общего положения, предупредив читателя о том, что это уравнение «довольно сложно». Он определяет положение прямой на плоскости двумя параметрами, напоминающими параметры известного «уравнения прямой с угловым коэффициентом» в аналитической геометрии евклидовой плоскости ($y = kx + b$). Проведя через начало O перпендикуляр к оси OX, он за первый параметр принимает отрезок a, а за второй — угол L на черт. 49 [5]). После громоздких выкладок он получает «довольно сложное» уравнение (23) этой кривой.



Черт. 49.

Уравнение очень упрощается в двух частных случаях: когда данная прямая параллельна оси OX (в смысле Лобачевского) и когда она проходит через начало координат. В первом случае $L = \Pi(a)$, и уравнение (23) переходит в (24), а во втором $a = 0$ и оно переходит в (24а), «что согласуется с уравнением (10)», ранее полученным Лобачевским, — этим замечанием он заканчивает главу.

Попутно, выведя уравнение (24), Лобачевский получает из него очень важный результат. Он проводит две дуги предельных линий (черт. 23 текста Лобачевского), для которых отрезки a и y являются тангенциальными протяжениями. Подставляя в уравнение (24) длины

---

1) Н. И. Лобачевский, Полн. собр. соч., т. I, стр. 213.

2) См. стр. 83—84 этой книги.

3) О высоте предельной линии см. примечание [270].

4) Стр. 338 этой книги.

5) При этом предполагается, что прямая пересекает указанный перпендикуляр. Фактически Лобачевский начинает с того, что выбирает на данной прямой некоторую точку, опускает из нее перпендикуляр на ось абсцисс и основание этого перпендикуляра принимает за начало координат.

этих дуг, найденные выше: $s = \cos \Pi(a)$, $s' = \cos \Pi(y)$, Лобачевский получает, что

$$s' = se^{-x}.$$

Но выше, в главе II, было найдено, что

$$s' = sE^{-x}.$$

Следовательно, введенное ранее число E равно e, т. е. основанию натуральных логарифмов.

Это — результат, которого не было в «Геометрических исследованиях». Но Лобачевский вполне сознавал равенство обеих постоянных еще в 1829 году — это видно из сопоставления формул (12) и (36) сочинения «О началах геометрии» [1]).

[267] Первое из этих уравнений есть уравнение (11) (a, b и c заменены соответственно на x, y и $2a$). Второе и третье уравнения представляют собой первое из уравнений (10) [a, A и B заменены для второго уравнения на x, $\Pi(a) - \Pi(y)$ и $\Pi(y)$, а для третьего — на y, $\Pi(a)$ и $\Pi(a) - \Pi(y)$]. Формула (21) получается заменой $\sin[\Pi(a) - \Pi(y)]$ на $\sin \Pi(a) \cos \Pi(y) - \cos \Pi(a) \sin \Pi(y)$, а следующая за ней формула — заменой $\sin \Pi(2a)$ на $\frac{\sin^2 \Pi(a)}{1 + \cos^2 \Pi(a)}$ по первой формуле сложения [2]).

[268]. Разделив числитель и знаменатель дроби $\frac{\sin^2 \Pi(a)}{1 + \cos^2 \Pi(a)}$ на $\cos^2 \Pi(a)$, приводим ее к виду $\frac{\operatorname{tg}^2 \Pi(a)}{2 + \operatorname{tg}^2 \Pi(a)}$. Заменяя же $\operatorname{tg} \Pi(a)$ через $2 \operatorname{tg} \Pi(y)$, получаем выражение, приведенное в тексте.

[269] $2 \cos^2 \frac{1}{2} \Pi(x') = 1 + \cos \Pi(x') = 1 + \sin \Pi(x)$, [напоминаем, что $\Pi(x') = \frac{\pi}{2} - \Pi(x)$] и, стало быть, вследствие предыдущей формулы получаем выражение, приведенное в тексте.

[270] Этот перпендикуляр в настоящее время обыкновенно называют *высотой предельной дуги.*

[271] Напоминаем, что для малого x (см. стр. 164) $\operatorname{ctg} \Pi(x) = x$.

[272] Лобачевский определяет длину предельной дуги по ее тангенциальному протяжению (см. примечание [242]. В этом же примечании разъяснена вводимая Лобачевским функция $L(t)$, о которой говорится дальше).

[273] То есть выражая (применительно к черт. 21 текста Лобачевского), что

$$\sin ADO \cdot \operatorname{tg} \Pi(OA) = \sin DAO \cdot \operatorname{tg} \Pi(AD).$$

---

1) Н. И. Лобачевский, Полн. собр. соч., т. I, стр. 205 и 219.

2) В формуле для $\sin \Pi(x + y)$ на стр. 158 этой книги полагаем $x = y = a$.

[274] Согласно «формуле сложения» на стр. 158 для $\operatorname{tg}\Pi(x+y)$, полагая в ней $x=y=\frac{1}{2}c$.

[275] Формула (22) выражает длину предельной дуги через ее высоту: $t=\operatorname{ctg}\Pi(y)$. Но в прямоугольном треугольнике OED (черт. 21 текста Лобачевского)

$$\operatorname{ctg}\Pi(y)=\operatorname{ctg}\Pi(t)\sin\Pi(t)=\cos\Pi(t),$$

так что $s=\cos\Pi(t)$. К тому же результату приводит и предыдущая формула текста. В самом деле, половина OC дуги OA имеет высоту $OB=\frac{1}{2}c$, а потому дуга $OC=\operatorname{ctg}\Pi\left(\frac{1}{2}c\right)$, а дуга $s=2\operatorname{ctg}\Pi\left(\frac{c}{2}\right)$, т. е. согласно предыдущей формуле равна $\cos\Pi(t)$.

[276] Первые три из уравнений [22b] легко получаются из предыдущих, последние два просто повторяют предыдущие. Следующая формула текста Лобачевского получается заменой:

$$\begin{matrix} A & C & b & a \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ L-X & \frac{\pi}{2}-A & r & y \end{matrix}$$

[277] Умножая в предыдущей дроби числитель и знаменатель на $\operatorname{tg}(L-X)$, приводим ее к виду

$$\frac{\cos\Pi(r)\operatorname{tg}(L-X)}{\cos A\sin\Pi(r)+\sin A\operatorname{tg}(L-X)}.$$

Заменив здесь $\operatorname{tg}(L-X)$ через $\frac{\operatorname{tg}L-\operatorname{tg}X}{1+\operatorname{tg}L\operatorname{tg}X}$, а $\sin\Pi(r)$ — через $\sin\Pi(x)\sin\Pi(a)$, получаем выражение, данное в тексте.

Далее Лобачевский использует формулу

$$\operatorname{tg}X=\operatorname{tg}\Pi(a)\cos\Pi(x).$$

[278] Подробнее: заменяем в предыдущем выражении $\cos A$ через $\frac{\cos\Pi(x)}{\cos\Pi(r)}$, $\sin A$ — через $\frac{\operatorname{tg}\Pi(x)\cos\Pi(a)\cos\Pi(x)}{\cos\Pi(r)}=\frac{\sin\Pi(x)\cos\Pi(a)}{\cos\Pi(r)}$, а $\cos^2\Pi(r)$ — через $1-\sin^2\Pi(r)=1-\sin^2\Pi(x)\sin^2\Pi(a)$. Затем после преобразований получаем выражение, данное в тексте.

Формула (23) и представляет собой уравнение прямой. Сравнительная сложность этого уравнения имеет тот источник, что Лобачевский пользуется декартовыми координатами, которые в гиперболической плоскости менее приспособлены для аналитической геометрии, чем в евклидовой. В так называемых бельтрамиевых координатах прямая выражается простым линейным уравнением, очень сходным с нормальным уравнением прямой в евклидовой плоскости [1]).

[1]) См. В. Ф. Каган, Основания геометрии, ч. I, М.—Л., 1949, стр. 333.

В сочинении «О началах геометрии» Лобачевский получил уравнение (23) иным путем [1]). Оба вывода заключатся в установлении соотношения между сторонами a, x, y и углом L в четырехугольнике с двумя прямыми углами при стороне x. Н. М. Несторович в статье «О фигурах-двойниках в пространстве Лобачевского и применении их к решению геометрических задач на построение» [2]) дает все соотношения, связывающие четыре элемента такого четырехугольника. Формула (23) фигурирует у Несторовича под номером XII.

[279] Равенство [23a] можно на основании [22a] представить в виде

$$\cos \Pi (y) = \frac{\cos \Pi (a) [1 - \cos \Pi (x)]}{\sin \Pi (x)} = \cos \Pi (a) \operatorname{tg} \frac{1}{2} \Pi (x) = \cos \Pi (a) e^{-x}.$$

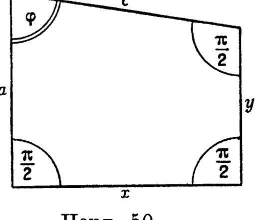
[280] Дальнейшие формулы вытекают из [22a] и (24).

[281] По поводу этого важного результата см. заключительную часть вводного примечания к этой главе (стр. 344—345).

[282] Заметим, что последнее уравнение не совпадает ни с одним из уравнений (10). Оно следует из уравнения [22b].

VII. Уравнения, связывающие элементы четырехугольника с тремя прямыми углами, и их применения

Результаты предыдущей главы были основаны, главным образом, на уравнениях, связывающих стороны и углы треугольника. Дальнейшие важные результаты будут основаны на уравнениях, относящихся к *трипрямоугольнику* — так по предложению Д. Д. Мордухай-Болтовского [3]) называется четырехугольник в плоскости Лобачевского, у которого три угла прямые (черт. 50); четвертый его угол φ должен быть острым [4]). Две его стороны x и y, к которым прилежат только прямые углы, называются обычно *основаниями*, а две другие стороны a и c — *высотами* трипрямоугольника.



Черт. 50.

---

[1]) Н. И. Лобачевский, Полн. собр. соч., т. I, стр. 212, формула (24).

[2]) «Ученые записки НИИ мат. и физ. при Ростовском Гос. ун-те», т. III, 1939.

[3]) Д. Д. Мордухай-Болтовской, О геометрических построениях в пространстве Лобачевского. Сборник «In memoriam N. I. Lobatschevsky», II, Казань, 1927.

[4]) Сумма всех четырех углов плоского выпуклого четырехугольника всегда $< 2\pi$, так как диагональю он разбивается на два треугольника, а сумма углов каждого из них $< \pi$.

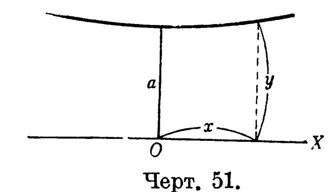
Глава VII состоит из двух статей: 14 и 15.

В статье 14 выводятся два основных соотношения (25) и (26) между элементами трипрямоугольника [1]). Статья заканчивается замечательным выводом из уравнения (26): трипрямоугольник существует, если $\Pi(a) < \varphi < \frac{\pi}{2}$, т. е., согласно определению угла параллельности, если противоположные стороны x и c расходятся. Следовательно, *две расходящиеся прямые* (x и c) *имеют общий перпендикуляр* (y).

Этот факт, характерный для геометрии Лобачевского, не приводится в «Геометрических исследованиях». Но Лобачевский знал о нем задолго до написания «Пангеометрии» — он установил его тем же методом еще в сочинении «О началах геометрии» и формулировал следующими словами:

> «Итак, две прямые в плоскости должны быть или сходящимися, или параллельными, или перпендикулами к одной» [2]).

В статье 15 дано два применения полученных формул к аналитической геометрии. Первое применение состоит в упрощении уравнения прямой, расходящейся с осью OX, если за начало O взять основание общего перпендикуляра к этим прямым (черт. 51). Уравнение принимает простой вид (27).



Черт. 51.

Другим применением является важная формула аналитической геометрии — расстояние r между двумя точками $M(x, y)$ и $M'(x', y')$. Оно выражается неявной формулой (черт. 27 текста Лобачевского):

$$\sin \Pi(r) = \sin \Pi(y' - y_1) \sin \Pi(q),$$

где y_1 и q определяются из уравнений $\cos \Pi(y_1) = \cos \Pi(y) \cdot \sin \Pi(\Delta x)$, $\cos \Pi(\Delta x) = \cos \Pi(q) \cdot \sin \Pi(y_1)$. Эта формула будет использована в следующей главе для определения линейного элемента в плоскости Лобачевского.

[283] «Соединение» состоит в почленном делении одного равенства на другое.

---

1) Еще в сочинении «О началах геометрии» Лобачевский показал, что каждому трипрямоугольнику с основаниями x и y и высотами a и c и острым углом $\varphi = \Pi(b)$ сопутствует прямоугольный треугольник с катетами x и b', гипотенузой c и острыми углами $\Pi(a)$ и $\Pi(y')$ и обратно. (Штрихами обозначены дополнительные отрезки, см. стр. 310 этой книги.) Таким образом, уравнения, связывающие стороны и угол трипрямоугольника, могут быть получены непосредственно из уравнений прямоугольного треугольника. (См. Н. И. Лобачевский, т. I, стр. 210—211, черт. 10 и 11 и примечания [39—41] на стр. 289—290 первого тома.) В «Пангеометрии» Лобачевский дает несколько кропотливый, но независимый вывод этих уравнений.

2) Н. И. Лобачевский, Полн. собр. соч., т. I, стр. 211.

[284] На основании вывода, сделанного в предыдущей статье из формулы (26).

[285] В формуле (25), примененной к черт. 25 текста Лобачевского, y есть общий перпендикуляр к двум сторонам четырехугольника; теперь он заменяется отрезком b, а противолежащая ему сторона a на черт. 25 заменяется отрезком l.

VIII. Вычисление длины дуги плоской кривой

В главе VI уже применялось интегрирование (элементарными приемами) для вычисления длины окружности и дуги предельной линии. В настоящей главе эти же формулы будут получены общим путем, который можно применить для любой кривой, заданной своим уравнением. По существу, этот способ ничем не отличается от общего метода интегрирования линейного элемента (дифференциала дуги) ds в декартовых и полярных координатах, но теперь известные формулы евклидовой геометрии $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$ и $ds = \sqrt{dr^2 + r^2 d\varphi^2}$ заменяются несколько более сложными.

Лобачевский сначала выводит формулу [A] для линейного элемента в декартовых координатах и применяет ее для предельной линии, тогда общая формула [A] переходит в [A′]; интегрированием последней получается уже известная читателю формула (20) длины дуги предельной линии.

Затем он вводит полярные координаты, определяя их совершенно так же, как и в евклидовой геометрии, и получает выражение [B] для линейного элемента в полярных координатах. Применяя ее для окружности радиуса r, он находит известную формулу для ее длины $2\pi \operatorname{ctg} \Pi(r)$.

В заключение Лобачевский из последней формулы изящным геометрическим приемом снова получает формулу (20).

Хотя глава VIII очень небольшая (состоит всего из одной статьи 16), она интересна во многих отношениях.

Во-первых, здесь выведены важные формулы [A] и [B]; попутно получена часто применяемая в дальнейшем формула для дифференциала функции Лобачевского $\Pi(x)$:

$$d\Pi(x) = -\sin \Pi(x)\, dx. \tag{I}$$

Во-вторых, здесь впервые проводятся интегральные вычисления общим методом различными способами и результаты сравниваются между собой. В дальнейшем Лобачевский широко использует этот прием для проверки результатов и нахождения значений некоторых определенных интегралов.

Весь материал этой главы Лобачевский поместил также в своем первом сочинении «О началах геометрии» [1]).

[286] Проведем подробно вывод важной формулы [A] — линейного элемента в декартовых координатах.

В конце предыдущей главы была установлена формула для расстояния r между двумя точками $M(x, y)$ и $M'(x', y')$:

$$\sin \Pi (r) = \sin \Pi (y' - y_1) \cdot \sin \Pi (q), \tag{1}$$

где y_1 и q — отрезки, связанные с y и Δx равенствами

$$\cos \Pi (y_1) = \cos \Pi (y) \cdot \sin \Pi (\Delta x) \text{ и } \cos \Pi (\Delta x) = \cos \Pi (q) \cdot \sin \Pi (y_1). \tag{2}$$

Полагая Δx, q, r и $y' - y_1$ бесконечно малыми, ограничимся в формулах (1) и (2) малыми низшего порядка, пользуясь известными формулами $\sin \Pi (\alpha) \approx 1 - \frac{\alpha^2}{2}$, $\cos \Pi (\alpha) \approx \alpha$. Формула (1) дает

$$1 - \frac{r^2}{2} = \left(1 - \frac{(y' - y_1)^2}{2}\right)\left(1 - \frac{q^2}{2}\right) \quad \text{или} \quad r^2 = (y' - y_1)^2 + q^2,$$

а формулы (2):

$$\cos \Pi (y_1) \approx \cos \Pi (y), \quad \Delta x = q \cdot \sin \Pi (y_1)$$

или

$$y_1 \approx y, \quad \Delta x \approx q \sin \Pi (y),$$

откуда

$$r^2 \approx (y' - y)^2 + \left(\frac{\Delta x}{\sin \Pi (y)}\right)^2,$$

или, в других обозначениях,

$$ds^2 = dy^2 + \frac{dx^2}{\sin^2 \Pi (y)}.$$

[287] Это — уравнение [20a] на стр. 167; предельная линия отнесена к началу и к начальной оси (см. черт. 18 текста Лобачевского).

[288] Дифференцируя основное соотношение $\operatorname{tg} \frac{1}{2} \Pi (x) = e^{-x}$, получаем:

$$\frac{d\Pi (x)}{2 \cos^2 \frac{1}{2} \Pi (x)} = - e^{-x} \, dx.$$

Заменяя здесь e^{-x} через $\operatorname{tg} \frac{1}{2} \Pi (x)$, получаем:

$$\frac{d\Pi (x)}{2 \sin \frac{1}{2} \Pi (x) \cos \frac{1}{2} \Pi (x)} = - dx,$$

или

$$d\Pi (x) = - \sin \Pi (x) \, dx.$$

---

[1]) Н. И. Лобачевский, Полн. соб. соч., т. I, стр. 217—219.

Эта формула для дифференциала функции $\Pi(x)$ в дальнейшем применяется многократно.

[289] Заменяя в формуле

$$ds^2 = dy^2 + \frac{dx^2}{\sin^2 \Pi(y)}$$

dy через найденное выражение $\frac{e^{-x}\,dx}{\sin \Pi(y) \cos \Pi(y)}$, получаем:

$$ds^2 = \frac{dx^2}{\sin^2 \Pi(y)} \left[\frac{e^{-2x}}{\cos^2 \Pi(y)} + 1 \right].$$

Заменяя здесь $\sin^2 \Pi(y)$ через e^{-2x}, получим выражение [A′], данное в тексте.

[290] Выражение (27a) пишем в виде

$$\frac{[\cos\varphi \cos \Pi(r)\, d\varphi + \sin\varphi\, dr] \cos \Pi(y)}{\sin\varphi \cos \Pi(r)};$$

но из предыдущей формулы имеем:

$$\operatorname{tg} \Pi(y) = \frac{\operatorname{tg} \Pi(r)}{\sin\varphi}, \quad \cos \Pi(y) = \frac{\sin\varphi}{\sqrt{\sin^2\varphi + \operatorname{tg}^2 \Pi(r)}},$$

а потому

$$\frac{\cos \Pi(y)}{\sin\varphi \cos \Pi(r)} = \frac{1}{\cos \Pi(r) \sqrt{\sin^2\varphi + \operatorname{tg}^2 \Pi(r)}} = \frac{1}{\sqrt{\sin^2\varphi \cos^2 \Pi(r) + \sin^2 \Pi(r)}},$$

что и дает выражение, приведенное в тексте.

[291] Собственно, третье из уравнений (10), в котором полагаем $c = r$, $a = x$, $B = \varphi$.

[292] Равенство (27b) в дифференциалах дает

$$dx = \frac{\sin \Pi(r)\, [\sin \Pi(r) \cos\varphi\, dr - \sin\varphi \operatorname{ctg} \Pi(r)\, d\varphi]}{\sin^2 \Pi(x)}.$$

Отсюда, принимая во внимание, что $\sin \Pi(r) = \sin \Pi(x) \sin \Pi(y)$, получаем:

$$\frac{dx}{\sin \Pi(y)} = \frac{\cos\varphi \sin \Pi(r)\, dr - \sin\varphi \operatorname{ctg} \Pi(r)\, d\varphi}{\sin \Pi(x)}.$$

Заменяя же $\sin \Pi(x)$ в силу предыдущего равенства через $\sqrt{1 - \cos^2\varphi \cos^2 \Pi(r)}$, получаем выражение, приведенное в тексте. Прибавляя к квадрату этого выражения dy^2 из уравнения (27a), получаем также следующую формулу текста.

IX. Вычисление площадей плоских фигур

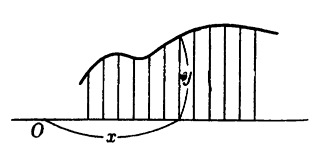
В предыдущих главах на ряде примеров было отмечено, что Лобачевский стремится вычислять одну и ту же величину различными средствами. Особенно характерна в этом отношении настоящая глава, посвященная вычислению площадей при помощи интегрирования

различными путями. Здесь Лобачевский показывает неистощимую изобретательность и искусство, которыми проникнуты его сочинения «О началах геометрии», «Воображаемая геометрия» и «Применение воображаемой геометрии к некоторым интегралам». Особенно поражаешься тому, что Лобачевский свое последнее произведение «Пангеометрия» составил уже совершенно слепым, диктуя его своим ученикам и производя сложнейшие вычисления в уме. Он не ограничивается при этом простым пересказом своих старых вычислений, а делает многие из них заново, творчески перерабатывает весь материал сочинения, придумывает существенно новые способы, которых не было раньше.

Глава состоит из трех статей: 17, 18 и 19. Содержание их следующее.

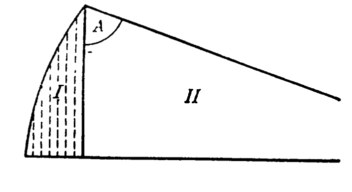
Цель статьи 17 — установить, что площадь S многоугольника пропорциональна его угловому дефекту, т. е. разности $(n-2)\pi-\Sigma$, где Σ — сумма всех углов многоугольника. Коэффициент пропорциональности зависит от единицы измерения площади; Лобачевский сначала исходит из единицы, фиксированной еще в главе II (ст. 3), но затем заменяет ее такой, чтобы коэффициент пропорциональности стал равен единице; тогда $S=(n-2)\pi-\Sigma$.

Эта важная теорема, аналогичная известной теореме геометрии на сфере[1], была установлена Лобачевским еще в сочинении «О началах геометрии»[2] элементарными средствами. В «Пангеометрии» он доказывает ее для прямоугольного треугольника следующим способом.



Черт. 52.

Сначала дается прием вычисления площади плоской фигуры разбивкой ее на элементарные полосы серией «параллельных» предельных линий и интегрированием полученных элементов (черт. 30 текста Лобачевского). В полученной формуле [a] дуги s предельных линий выражаются через их высоты y, и «кривые» элементы площади заменяются вертикальными «столбцами» (черт. 52). Получается важная формула для элемента длины [b], в которой позже Лобачевский отбросил постоянный множитель, изменив единицу измерения (формула 27d). Эту формулу он применяет к фигуре I (черт. 53), ограниченной предельной линией, ее высотой и отрезком оси. Но раньше, в статье 3, была получена формула для всей площади $I+II$ между



Черт. 53.

---

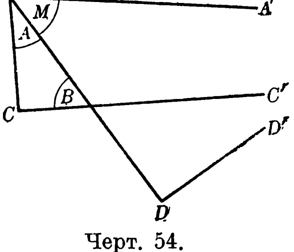
[1]) См. стр. 112 и 138 этой книги.

[2]) Н. И. Лобачевский, Полн. собр. соч., т. I, стр. 219—221.

дугой предельной линии и ее осями в крайних точках; вычитанием Лобачевский получает простую формулу для площади *II* (в соответствующих единицах):

$$S_{\text{II}} = \frac{\pi}{2} - A.$$

Площадь прямоугольного треугольника ABC (черт. 54) рассматривается как сумма и разность площадей трех фигур типа *II*:



Черт. 54.

$$S_{ABC} = S_{A'ACC'} + S_{C'BDD'} - S_{A'ADD'} =$$

$$= \left[\frac{\pi}{2} - (A + M)\right] + \left[\frac{\pi}{2} - B\right] - \left[\frac{\pi}{2} - M\right] =$$

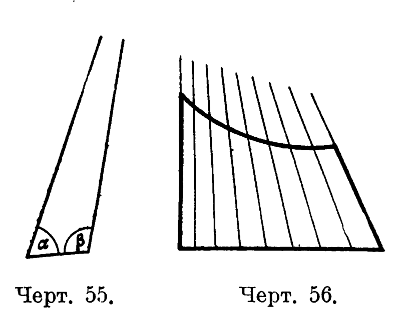
$$= \frac{\pi}{2} - A - B = \frac{\pi}{2} - (A + B).$$

Теорема доказана; случай любого многоугольника легко сводится к рассмотренному. В частности, площадь трипрямоугольника равна

$$2\pi - \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} + \omega\right) = \frac{\pi}{2} - \omega,$$

где ω — его острый угол. Этот результат используется в следующей статье.

В статье 18 площадь трипрямоугольника вычисляется общим методом интегрирования по формуле (27d), в которой переменная ордината y выражается через абсциссу x из упрощенного уравнения прямой линии (27), выведенного в главе VII. Лобачевский приравнивает полученный интеграл величине $\frac{\pi}{2} - \omega$ и получает, таким образом, значение этого интеграла. Его можно проверить дифференцированием; Лобачевский отмечает совпадение обоих результатов.



Черт. 55. Черт. 56.

Он пытается обобщить результат, полученный для прямой линии, и на произвольную кривую, но делает это неудачно (см. примечание [305]).

Далее Лобачевский применяет результат, полученный в предыдущей статье (выражение площади треугольника через его углы), к вырожденному треугольнику (черт. 55), ограниченному конечным отрезком и двумя параллельными лучами, исходящими из его концов. Эта площадь равна $\pi - \alpha - \beta$; она используется следующим образом.

Площадь между кривой и осью x разбивается на элементарные полосы пучком параллельных прямых, начиная с перпендикуляра к оси x (черт. 56); каждый элемент площади имеет вид фигуры, изобра-

женной на черт. 55. Это приводит Лобачевского к новому виду элемента площади [27e], который будет использован в следующей статье.

В заключение Лобачевский применяет формулу [27d] для вычисления площади круга. Он находит для нее выражение

$$S = 2\pi\left\{\frac{1}{\sin\Pi(r)} - 1\right\}$$

и отмечает:

> «Если r чрезвычайно мало, то это выражение дает площадь круга $=\pi r^2$, то же самое выражение, которое обыкновенно дается для площади круга в Геометрии».

В статье 19 Лобачевский получает элемент площади в полярных координатах, заменяя, как мы обычно делаем, площадь сектора кривой площадью кругового сектора с центральным углом $d\varphi$. Получается формула [27f], которая применяется для вычисления площади треугольника (полюс помещается в одну из вершин, а полярная ось направляется по стороне треугольника). Полученный результат дает довольно сложный интеграл, который должен быть равен $\pi - A - B - C$. В случае $B = \frac{\pi}{2}$ интеграл упрощается, его можно вычислить элементарно, и в результате получается одно из основных соотношений для прямоугольного треугольника. Этим создается уверенность в правильности общей формулы для косоугольного треугольника, и Лобачевский отмечает очень важный для него результат:

> «Два значения для той же площади, будучи необходимо равными, доставляют способ вычислять определенные интегралы, которых значение было бы затруднительно найти другим образом».

Глава заканчивается еще двумя примерами: вычисляется площадь прямоугольного треугольника разбиением на элементы типа черт. 52 и косоугольного треугольника — на элементы типа черт. 56 (черт. 36 и 37 текста Лобачевского). Получаются еще два значения сложных интегралов. Второй из них сводится к одному из основных соотношений для косоугольного треугольника [формула (19)], найденному Лобачевским раньше.

Глава дает отчетливое представление об интегральных вычислениях Лобачевского в декартовых и полярных координатах. Но этими координатами Лобачевский не ограничивается.

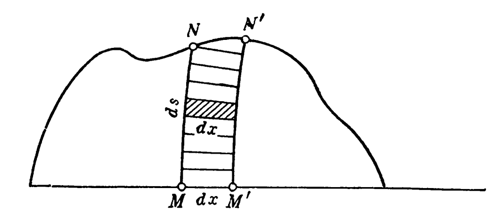
[293] К этой формуле Лобачевский приходит следующим образом. Если проведем прямую NX_1, параллельную MX (черт. 30 текста Лобачевского), то площадь, ограниченная дугой s и параллелями MX и NX_1, согласно формуле на стр. 144 равна $\frac{es}{e-1}$. Если через N'' обозначим точку пересечения прямой NX_1 с дугой $M'N'$, то площадь,

ограниченная теми же параллелями и дугой $M'N''$ $(= s')$, равна $\frac{es'}{e-1}$ (напомним, что $E = e$); следовательно, площадь $MNN''M'$ равна $\frac{e(s-s')}{e-1}$. Но согласно формуле на стр. 143 $s' = se^{-dx}$; поэтому площадь $MNN''M'$ равна (пренебрегаем высшими степенями dx)

$$\frac{es}{e-1}(1-e^{-dx}) = \frac{ex\,dx}{e-1}.$$

Эта площадь отличается от площади $MNN'M'$ на бесконечно малую не ниже 2-го порядка.

К тому же результату можно придти проще, если полосу разделить на элементы прямыми, параллельными оси абсцисс (черт. 57). Площадь каждого элемента можно рассматривать в пределах точности, которой Лобачевский придерживается, как прямоугольник и считать (по формуле евклидовой геометрии) равной $ds\,dx$, а потому площадь всей полосы равна $s\,dx$. Она отличается от формулы, данной в тексте, тем, что отброшен постоянный множитель $\frac{e}{e-1}$. Это обусловливается тем, что единица площади, при которой площадь бесконечно малого треугольника можно выражать по формуле евклидовой геометрии, отличается от той единицы, в которой здесь выражена площадь dS, множителем $\frac{e}{e-1}$. Лобачевский так это и отмечает ниже, в формуле [27с] на стр. 182, хотя он этого не оговаривает.



Черт. 57.

[294] Выражение длины дуги предельной линии через ее высоту [формула (22) на стр. 169].

[295] Формула [20а] на стр. 166. Речь идет о вычислении площади ABC на черт. 31 текста Лобачевского.

[296] Дифференцируя предыдущее уравнение, получаем:

$$\cos\Pi(y)\,d\,\Pi(y) = -e^{-x}\,dx.$$

А так как в данном случае $d\,\Pi(y) = -\sin\Pi(y)\,dy = -e^{-x}\,dy$, то

$$dx = \cos\Pi(y)\,dy.$$

Это приводит к выражению, данному в тексте.

[297] Заменяя dy через $-\frac{d\,\Pi(y)}{\sin\Pi(y)}$, получаем:

$$dS = -\frac{e}{e-1}\operatorname{ctg}^2\Pi(y)\,d\,\Pi(y) = -\frac{e}{e-1}\left\{\frac{d\,\Pi(y)}{\sin^2\Pi(y)} - d\,\Pi(y)\right\},$$

а потому

$$S=\frac{e}{e-1}\Big[\operatorname{ctg}\Pi(y)+\Pi(y)\Big]_0^y,$$

что и приводит к результату, данному в тексте и выражающему площадь ABC.

[298] См. формулу на стр. 144 и примечание [238] к ней. Речь идет о площади $A'ABB'$ на черт. 4 текста Лобачевского (стр. 145).

[299] Вычитаем из последней формулы предыдущую и отбрасываем множитель $\frac{e}{e-1}$, как это выяснено в примечании [294]. Эта формула, таким образом, выражает площадь $XCBX_1$ на черт. 31 текста Лобачевского.

[300] На черт. 32 текста Лобачевского $\angle A'AC=\Pi(b)=\Pi(\alpha)+\Pi(c+\beta)$.

[301] Речь идет о трипрямоугольнике, рассмотренном в главе VII. Следует иметь в виду, что на черт. 33 и 25 текста Лобачевского обозначения a и y переставлены; поэтому формула (25) теперь имеет вид

$$\cos\Pi(a)=\cos\Pi(y)\cdot\sin\Pi(x).$$

Угол φ черт. 25 теперь обозначается через ω, так что формула (26) будет такой:

$$\operatorname{tg}\omega=\frac{\operatorname{tg}\Pi(y)}{\cos\Pi(x)}.$$

[302] Выше (стр. 181) была получена формула $dS=\frac{e\,dx\operatorname{ctg}\Pi(y)}{e-1}$. Множитель $\frac{e}{e-1}$ отбрасываем (см. примечание [293]).

[303] Из предыдущей формулы получаем:

$$\operatorname{ctg}\Pi(y)=\frac{\cos\Pi(y)}{\sqrt{1-\cos^2\Pi(y)}}=\frac{\cos\Pi(a)}{\sqrt{\sin^2\Pi(x)-\cos^2\Pi(a)}}.$$

[304] Если положим $\Pi(x)=\xi$, то

$$d\xi=d\Pi(x)=-\sin\Pi(x)\,dx=-\sin\xi\,dx;\qquad dx=-\frac{d\xi}{\sin\Pi(x)}=-\frac{d\xi}{\sin\xi}.$$

Это дает для формулы (M):

$$\frac{\frac{1}{2}\pi-\omega}{\cos\alpha}=\int\limits_0^x\frac{dx}{\sqrt{\sin^2\Pi(x)-\cos^2\alpha}}=$$

$$=-\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\xi}\frac{d\xi}{\sin\xi\sqrt{\sin^2\xi-\cos^2\alpha}}=\int\limits_{\xi}^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\xi}{\sin\xi\sqrt{\sin^2\alpha-\cos^2\xi}}.$$

[305] Далее в подлинном тексте Лобачевского идет следующий абзац:

«Пусть требуется найти

$$\int A\,dx,$$

где A — данная функция от x. Чтобы отыскать значение этого интеграла, надобно положить $A = \operatorname{cotg} \Pi(y)$, потом определять значения y', y'', y''', ..., которые отвечают x', x'', x''', ..., взятых произвольно между границ интегрирования, после чего надобно вычислять длину хорд, которыми соединяются вершины y' с y'', y'' с y''', и угол, который каждая хорда делает с продолжением следующей хорды. Сумма этих углов дает приближенное значение интеграла».

Это рассуждение содержит ошибку и поэтому в тексте настоящего издания не помещено. Ошибка разъяснена в книге: Н. И. Лобачевский, Полн. собр. соч., т. III, стр. 530—532, примечание [11].

[306] Речь идет о вычислении площади между кривой линией N_0NN_1 на черт. 34 текста Лобачевского и осью OX.

[307] Согласно формуле (27с). Площадь $O'OMM'$ равна $\frac{\pi}{2} - \Pi(x)$; площадь $O'OM_1M_1'$ равна $\frac{\pi}{2} - \Pi(x + dx) = \frac{\pi}{2} - \Pi(x) - d\Pi(x)$. Поэтому площадь $M'MM_1M_1'$ равна $-d\,\Pi(x)$; знак минус объясняется тем, что $d\,\Pi(x)$ имеет отрицательное значение (при $dx > 0$).

[308] Площадь $M'MM_1M_1'$ можно с обычной степенью точности заменить площадью $M'MPM_1'$, где MP — предельная дуга (s) осей MM' и M_1M_1'. Точно так же площадь $M'NN_1M_1'$ можно заменить площадью $M'NP_1M_1'$. Отношение этих площадей равно $s : s'$ или согласно формуле на стр. 143 равно e^u.

[309] Из уравнения круга $\sin \Pi(x) \sin \Pi(y) = \sin \Pi(r)$ имеем:

$$\operatorname{ctg} \Pi(y) = \frac{\sqrt{\sin^2 \Pi(x) - \sin^2 \Pi(r)}}{\sin \Pi(r)}.$$

Представим $dS = dx \operatorname{ctg} \Pi(y)$ в виде разности двух дробей:

$$dS = \frac{\sin^2 \Pi(x)\,dx}{\sin \Pi(r) \sqrt{\cos^2 \Pi(r) - \cos^2 \Pi(x)}} - \frac{\sin \Pi(r)\,dx}{\sqrt{\sin^2 \Pi(x) - \sin^2 \Pi(r)}};$$

положим в первой из них $\cos \Pi(x) = u$, $d \cos \Pi(x) = \sin^2 \Pi(x)\,dx = du$, а во второй, написав ее в виде $\frac{dx}{\sin \Pi(x) \sqrt{\operatorname{ctg}^2 \Pi(r) - \operatorname{ctg}^2 \Pi(x)}}$,

$$\operatorname{ctg} \Pi(x) = v, \quad \frac{dx}{\sin \Pi(x)} = dv.$$

Тогда

$$dS = \frac{du}{\sin \Pi (r) \sqrt{\cos^2 \Pi (r) - u^2}} - \frac{dv}{\sqrt{\operatorname{ctg}^2 \Pi (r) - v^2}}.$$

Отсюда вытекает формула, данная в тексте.

[310] Рассматривая точку A как начало полярных координат, а угол A как полярный угол.

[311] Согласно приведенной выше формуле

$$\cos \Pi (y) = \cos \Pi (r) \cos B.$$

Следовательно, учитывая найденное выражение для $\sin \Pi (y)$,

$$\operatorname{ctg} \Pi (y) = \frac{\cos \Pi (r) \cos B \cos A \sin \Pi (x)}{\sqrt{\cos^2 A - \cos^2 \Pi (x)}}.$$

По приведенным выше формулам

$$\cos \Pi (r) \cos A = \cos \Pi (x), \quad \sin \Pi (x) \cos B = \sin A;$$

поэтому, как в тексте,

$$\operatorname{ctg} \Pi (y) = \frac{\sin A \cos \Pi (x)}{\sqrt{\cos^2 A - \cos^2 \Pi (r)}}.$$

[312] С помощью формулы $d \Pi (x) = - \sin \Pi (x) \, dx$.

[313] С отрезком x [CM], а не с осью OX. Этот угол NMC равен $\Pi (OM) = \Pi (\beta - a + x)$.

[314] По формуле (27е) на стр. 185.

[315] Последнее из уравнений (19) на стр. 164 с заменой обозначений:

$$a \to u, \quad b \to x, \quad C \to \Pi (b - a - x).$$

[316] Так как

$$\cos \Pi (u) = \frac{e^u - e^{-u}}{e^u + e^{-u}}.$$

[317] Формулы для $\sin \Pi (x - y)$ и $\cos \Pi (x - y)$ на стр. 158.

X. Предельные координаты

В своих интегральных вычислениях Лобачевский не ограничивается декартовой и полярной системами координат. В начале предыдущей главы (стр. 181) он фактически пользовался системой координат (x, s), в которой ординатами точки плоскости были дуги предельных линий, ортогональных к оси абсцисс. Это были *предельные координаты* [1]), кото-

---

[1]) Термина «*предельные координаты*» у Лобачевского нет. В настоящее время они называются *орициклическими*. См. В. Ф. Каган, Основания геометрии, ч. I, М. — Л., 1949, стр. 365.

рым посвящена статья 20 «Пангеометрии», составляющая эту небольшую главу.

Предельные координаты вводятся не только на плоскости, но и в пространстве; Лобачевский обозначает их через ξ, η, ζ и использует в главе XIII (ст. 25). В ряде вычислений предельные координаты имеют преимущество перед декартовыми: на это Лобачевский указывает в самом начале главы (см. ниже, вычисление объемов).

В этой статье Лобачевский дает определения предельных координат и вычисляет элемент площади на плоскости в этих координатах, а также выражения дифференциалов $d\xi$, $d\eta$, $d\zeta$ через x, y, z, dx, dy и dz.

В «Воображаемой геометрии» Лобачевский вводит и другие системы координат (называемые теперь *бельтрамиевыми* и *эквидистантными*), но в «Пангеометрии» он о них не упоминает.

Переходя от одной системы координат к другой, Лобачевский получает для одной и той же величины различные интегральные выражения; это позволяет ему получать значения некоторых определенных интегралов или сводить их к более простым. В дальнейшем тексте «Пангеометрии» будут приведены некоторые примеры этого.

[318] Это равенство получается из формулы [20a]; в ней нужно заменить x на $x-\xi$ (ср. черт. 18 и 38 текста Лобачевского).

[319] $\frac{dS}{dx}=\frac{dS}{d\xi}$, поскольку $dx=d\xi$ (с точностью до бесконечно малых высшего порядка). Далее, из равенства $\eta=\operatorname{ctg}\Pi(y)$ и $d\,\Pi(y)=-\frac{dy}{\sin\Pi(y)}$ имеем:

$$\frac{d\eta}{dy}=-\frac{d\,\Pi(y)}{\sin^2\Pi(y)}=\frac{dy}{\sin\Pi(y)},$$

откуда вытекает последняя формула.

В примечании [296] было установлено, что $dS=\operatorname{ctg}\Pi(y)\,dx$. Но $\frac{d\operatorname{ctg}\Pi(y)}{dy}=\frac{1}{\sin\Pi(y)}$, что согласуется с полученной формулой.

[320] Через точку N проводим прямую NX', параллельную оси OX, и плоскость MNX'.

[321] Уравнение [20a] на стр. 166.

[322] $\eta=PP_1=NN_1\cdot e^q=\operatorname{ctg}\Pi(y)\cdot e^q=\frac{\operatorname{ctg}\Pi(y)}{\sin\Pi(z)}$. Следующая формула вытекает из формулы [20a], в которой $\operatorname{tg}\frac{1}{2}\Pi(x)=e^{-x}$; заменяем x через $N_1Q=x-\xi-q$.

[323] Ср. примечание [319];

$$d\eta=\frac{d\operatorname{ctg}\Pi(y)}{\sin\Pi(z)}=-\frac{d\,\Pi(y)}{\sin^2\Pi(y)\sin\Pi(z)}=\frac{dy}{\sin\Pi(y)\sin\Pi(z)}.$$

XI. Выражение площади треугольника через его стороны

Эта глава имеет самостоятельный интерес; стоящую в ее названии задачу было бы уместно решить значительно раньше, например в главе IX, посвященной площадям плоских фигур. Но Лобачевский рассматривает ее как вспомогательную, подготовительную к главе XII «Вычисление площади кривой поверхности». Этим объясняется место главы в сочинении.

Цель Лобачевского высказана им в первых же строках главы: он стремится получить формулы для дифференциалов поверхностей и объемов. Тогда, говорит Лобачевский, будет достигнута полнота «новой теории под названием Пангеометрии, которая основана на началах более общих, нежели начала обыкновенной геометрии». Напомним, что более чем за 30 лет назад он начинал свой учебник «Геометрия» словами: «Часть чистой математики, в которой предписываются способы измерять пространство, называется *Геометриею*» [1]).

Какая связь между этой задачей и площадью треугольника? Лобачевский предлагает применять для измерения площади кривой поверхности метод триангуляции. Он пользуется им для самого определения величины поверхности:

> «Величина кривой поверхности измеряется суммою площадей треугольников, которые смыкаются в одну сплошную сеть и вершины которых лежат на поверхности; эта мера будет тем точнее, чем измеряемые треугольники менее» [2]).

Глава состоит из двух статей: 21 и 22.

В начале статьи 21 Лобачевский снова выводит соотношение $c = \frac{x}{\sin \Pi(a)}$ между бесконечно малыми противоположными сторонами трипрямоугольника. Оно уже было получено в начале главы VIII; теперь Лобачевский добавляет, что то же соотношение справедливо и для бесконечно тонкого четырехугольника Саккери.

Затем он, искусно комбинируя «подстановку Лобачевского» с формулами сложения, получает простую формулу для площади $\triangle$ (точнее для $\operatorname{tg}\frac{\triangle}{2}$) прямоугольного треугольника по его сторонам. Разби-

---

[1]) Стр. 33 этой книги.

[2]) Следует заметить, что это определение, применяемое Лобачевским, с современной точки зрения неправомерно: оно может привести при различном выборе треугольников к различным значениям площади одной и той же поверхности; более того, можно подобрать элементарные треугольники так, что искомая площадь получит любое значение. См. об этом Г. М. Фихтенгольц, Курс дифференциального и интегрального исчисления, т. III, Гостехиздат, 1949, стр. 305 (пример Шварца). Однако у Лобачевского этот способ вычисления площади не приводит к ошибке.

вая произвольный треугольник внутренней высотой на два прямоугольных, он находит площадь треугольника по его основанию и высоте. Обе формулы переходят в обычные формулы евклидовой геометрии, если стороны становятся бесконечно малыми.

Статья 22 посвящена выводу одной формулы — выражению площади произвольного треугольника через его стороны (аналог формулы Герона в евклидовой геометрии). При ее выводе Лобачевский снова показывает выдающуюся вычислительную технику, удивительную, если учесть состояние, в каком он писал «Пангеометрию». Интересную формулу (A) Лобачевский получил в «Пангеометрии» впервые: в прежних его сочинениях этой формулы еще нет.

При попытке проверить справедливость этой формулы в евклидовой геометрии при бесконечно малых сторонах Лобачевский допускает ошибку: вместо формулы (B) у него получилось явно неверное выражение [1]). На это впервые указал проф. Либман. В настоящем издании эта ошибка исправлена.

[324] Речь идет о трипрямоугольнике, изображенном на черт. 25 (стр. 173).

[325] Эта связь между бесконечно малыми противоположными сторонами трипрямоугольника была установлена в начале главы VIII (стр. 178).

Черт. 58.

[326] Если $y = a$ (четырехугольник Саккери, см. черт. 58), то соединяем середины отрезков c и x и получаем трипрямоугольник; сторона $\frac{x}{2}$ перпендикулярна к y и p, а сторона $\frac{c}{2}$ перпендикулярна к p; мы можем и в этом случае воспользоваться найденным соотношением (27′).

[327] См. конец статьи 4 на стр. 147. Эту подстановку

$$\begin{matrix} a & b & c & \alpha & \beta \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ a & \alpha' & \beta & b' & c \end{matrix}$$

Лобачевский здесь выполняет несколько раз.

[328] См. формулы на стр. 157.

[329] $2\Pi(\alpha') = 2\left[\frac{\pi}{2} - \Pi(\alpha)\right] = \pi - 2\Pi(\alpha)$, $\Pi(c-\beta) = \pi - \Pi(\beta - c)$.

[330] Выполняется та же подстановка Лобачевского.

1) См. примечание [339].

[331] Формула $\Delta = \frac{\pi}{2} - \Pi(\alpha) - \Pi(\beta)$ для площади треугольника была выведена на стр. 183. Здесь получено очень любопытное выражение для этой площади прямоугольного треугольника; этого выражения Лобачевский в своих предыдущих работах не давал.

[332] $$\operatorname{tg}\frac{1}{2}\Pi(a'+b') = e^{-(a'+b')} = e^{-a'}\cdot e^{-b'} =$$
$$= \operatorname{tg}\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} - \Pi(a)\right)\cdot \operatorname{tg}\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} - \Pi(b)\right).$$

[333] По формуле
$$\operatorname{tg}\frac{1}{2}(\Delta' + \Delta'') = \frac{\operatorname{tg}\frac{1}{2}\Delta' + \operatorname{tg}\frac{1}{2}\Delta''}{1 - \operatorname{tg}\frac{1}{2}\Delta'\cdot\operatorname{tg}\frac{1}{2}\Delta''}.$$

[334] Полагая $\operatorname{tg}\frac{1}{2}S = \frac{1}{2}S$ и $e^{\gamma} = 1 + \alpha$, получаем:
$$\frac{1}{2}S = \frac{2hc}{2(2+h)^2 + 2(1+h)x(c-x)};$$
отбрасывая в знаменателе бесконечно малые члены, получаем $S = \frac{ch}{2}$.

[335] По формуле для $\sin\Pi(b+c)$ на стр. 158.

[336] Перемножая последние два равенства и учитывая формулы для $\sin\Pi(b+c)$ и $\sin\Pi(b-c)$ на стр. 158.

[337] Это можно получить, перемножая найденные выражения для $\sin A$, $\sin B$, $\sin C$.

[338] Умножая и деля предыдущее выражение на $\frac{1}{\sin\Pi(c)} + 1$, получим множитель
$$\frac{1}{\sin^2\Pi(c)} - 1 = \operatorname{ctg}^2\Pi(c),$$
который со множителем $\operatorname{tg}^2\Pi(c)$ дает произведение 1.

[339] В подлинном тексте Лобачевского формулы [B] и [C] были даны в неверном виде:
$$\sin\frac{\Delta}{2} = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{2}} \quad [B] \quad \text{и} \quad \Delta = \frac{1}{2\sqrt{2}}\sqrt{a^2+b^2+c^2} \quad [C].$$

XII. Вычисление площади кривой поверхности

Эта глава состоит из двух статей: 23 и 24. Весь ее материал имеется в сочинении «О началах геометрии» 1).

В статье 23 Лобачевский находит элемент объема кривой поверхности в декартовых координатах и применяет его к вычислению

1) Н. И. Лобачевский, Полн. собр. соч., т. I, стр. 227—231.

поверхности шара. Опираясь на результаты предыдущей главы, он сначала находит площадь dS^2 бесконечно малого треугольника поверхности, имеющего специальное расположение вершин относительно системы координат (на такие треугольники можно разбить всякую поверхность). Получается формула (29) для dS^2. Затем Лобачевский умножает ее на 2 [1]) и получает поверхность бесконечно малого четырехугольника типа параллелограмма. Двойным интегрированием в нужных пределах можно найти площадь поверхности, заданной своим уравнением $F(x, y, z) = 0$.

Лобачевский применяет полученную формулу для определения поверхности шара, уравнение которого

$$\sin \Pi(r) = \sin \Pi(x) \cdot \sin \Pi(y) \cdot \sin \Pi(z).$$

После несложных вычислений он находит сначала площадь сферического кольца, ограниченного двумя кругами (один из них — большой), а затем и поверхность всей сферы. Она оказывается равной $4\pi \operatorname{ctg}^2 \Pi(r)$ или $\pi(e^r - e^{-r})^2$; для бесконечно малой сферы эта формула переходит в известную формулу евклидовой геометрии.

Статья 24 особенно интересна. Лобачевский определяет объем того же шара другим способом, вводя специальные координаты для точек сферы — угловые координаты ψ и φ. Найденный выше элемент объема пересчитывается в новых координатах по правилам интегрального исчисления, и после очень сложных вычислений получается новое выражение для поверхности сферы в виде двойного интеграла. Приравнивая его $4\pi \operatorname{ctg}^2 \Pi(r)$, Лобачевский находит значение этого интеграла. Его удается свести к одной квадратуре, и после дополнительных вычислений получается формула (31) — значение определенного интеграла

$$\int_0^\infty \frac{(e^{2x} - 1)\, e^x\, x dx}{e^{4x} + 2e^{2x} \cos 2R + 1} = \frac{\pi R}{4 \sin R}$$ [2]).

Это — тот самый определенный интеграл в сочинении «Воображаемая геометрия», который Остроградский в своем отзыве считал неверным и над которым издевался анонимный рецензент в «Сыне Отечества» [3]).

Вычисления Лобачевского очень сложные; он дает только несколько промежуточных результатов как в сочинении «О началах геометрии», так и здесь. В примечании [348] восстановлены все пропущенные Лобачевским вычисления и выяснено геометрическое

---

[1]) Явно не оговаривая этого.

[2]) $R = \Pi(r)$.

[3]) См. стр. 398 этой книги.

значение угловых координат ψ и φ. Эта большая работа была проведена А. П. Котельниковым в комментариях к сочинению «О началах геометрии».

Статья 24 является ярким примером, характеризующим метод Лобачевского для нахождения значений определенных интегралов и показывает исключительное искусство, с которым он его применяет.

[340] Лобачевский потому так подробно поясняет значения координат x, y, z, что в неевклидовой геометрии длина отрезка z (AA') (черт. 42 текста Лобачевского) не совпадает с длиной его проекции на ось OZ, как это имеет место в евклидовой геометрии. Точно так же $y\,(A'P)$ не совпадает с проекцией отрезка $A'P$ на ось OY.

[341] Три точки A, B, C Лобачевский выбирает не вполне произвольно. Взяв точку A (черт. 42 текста Лобачевского) произвольно, он выбирает точку B так, чтобы она имела ту же ординату y $(B'Q = A'P)$, а точку C так, чтобы она имела с A ту же абсциссу x (OP). Так как всегда $dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy$, то для точки B $dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx$, а для точки C $dz = \frac{\partial z}{\partial y}dy$. Через t обозначен отрезок $A'B'$.

[342] На $B'B$ откладываем отрезок $B'E = A'A$; тогда, как показано, $BE = \frac{\partial z}{\partial x}dx$. В четырехугольнике $AA'B'E$ углы при основании $A'B'$ прямые, а боковые стороны $A'A$ и $B'E$ равны (z). Поэтому в силу соотношения (27′)

$$AE = \frac{A'B'}{\sin \Pi(z)} = \frac{PQ}{\sin \Pi(y) \sin \Pi(z)} = \frac{dx}{\sin \Pi(y) \sin \Pi(z)}.$$

[343] На $C'C$ откладываем $C'F = A'A = z$. Тогда

$$AF = \frac{A'C'}{\sin \Pi(z)} = \frac{dy}{\sin \Pi(z)}, \qquad FC = \frac{\partial z}{\partial y}dy.$$

[344] Из прямоугольного треугольника $C'A'B'$ имеем:

$$\overline{C'B'}^2 = \overline{A'C'}^2 + \overline{A'B'}^2 = dy^2 + \frac{dx^2}{\sin^2 \Pi(y)}.$$

Откладываем на $C'C$ отрезок $C'G = B'B$. Тогда с тем же приближением $GC = \frac{\partial z}{\partial x}dx$.

Далее,

$$FG = FC - GC = \frac{\partial z}{\partial y}dy - \frac{\partial z}{\partial x}dx; \quad BG = \frac{B'C'}{\sin \Pi(z)}, \overline{B'C'}^2 = \left(\frac{dx}{\sin \Pi(y)}\right)^2 + dy^2.$$

Из прямоугольного треугольника BGC получаем для CB^2 выражение, указанное в тексте.

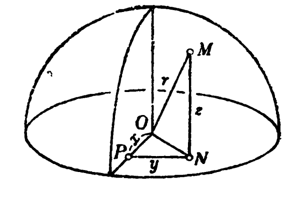
[345] Уравнение сферы (черт. 59) имеет вид

$$\sin \Pi(x) \sin \Pi(y) \sin \Pi(z) = \sin \Pi(r)\ ^{1)}.$$

Дифференцируя его последовательно по x и по y и учитывая, что

$$d\,\Pi(x) = -\sin \Pi(x)\,dx, \qquad d\,\Pi(y) = -\sin \Pi(y)\,dy,$$

получаем значения производных, данные в тексте.



Черт. 59.

[346] Лобачевский удваивает значение d^2S, полученное из формулы (29), потому что он вписывает в сферу не треугольники, а бесконечно малые четырехугольники (которые можно считать параллелограммами). Формула в тексте получается следующим образом.

Деля обе части уравнения (29) на $\sin \Pi(x) \sin \Pi(y)$, получаем для удвоенного значения второй производной выражение

$$\frac{d^2S}{d\,\Pi(x)\,d\,\Pi(y)} = \frac{1}{\sin \Pi(r)} \sqrt{U}, \tag{1}$$

где U — выражение, стоящее под радикалом в формуле (29). Подставляя вместо $\frac{dz}{dx}$ и $\frac{dz}{dy}$ (сохраняем для частных производных обозначения Лобачевского) найденные значения, получаем:

$$U = \frac{\cos^2 \Pi(x)}{\cos^2 \Pi(z)} + \frac{\cos^2 \Pi(y)}{\sin^2 \Pi(y) \cos^2 \Pi(z)} + \frac{1}{\sin^4 \Pi(y) \sin^2 \Pi(z)} =$$

$$= \frac{\cos^2 \Pi(x) \sin^2 \Pi(y) + \cos^2 \Pi(y)}{\sin^2 \Pi(y) \cos^2 \Pi(z)} + \frac{\sin^2 \Pi(x)}{\sin^2 \Pi(r)} =$$

$$= \frac{\cos^2 \Pi(x) \sin^2 \Pi(y) \sin^2 \Pi(r) + \cos^2 \Pi(y) \sin^2 \Pi(r) + \sin^2 \Pi(x) \sin^2 \Pi(y) \cos^2 \Pi(z)}{\sin^2 \Pi(y) \sin^2 \Pi(r) \cos^2 \Pi(z)}.$$

Выражая $\cos^2 \Pi(x)$, $\cos^2 \Pi(y)$ и $\cos^2 \Pi(z)$ соответственно через $\sin^2 \Pi(x)$, $\sin^2 \Pi(y)$ и $\sin^2 \Pi(z)$ и принимая во внимание, что

$$\sin \Pi(r) = \sin \Pi(x) \sin \Pi(y) \sin \Pi(z),$$

получаем после приведения подобных членов и умножения числителя и знаменателя на $\sin^2 \Pi(x)$:

$$U = \frac{\sin^4 \Pi(x) \sin^2 \Pi(y) \cos^2 \Pi(r)}{\sin^2 \Pi(r) \left[\sin^2 \Pi(x) \sin^2 \Pi(y) - \sin^2 \Pi(r)\right]},$$

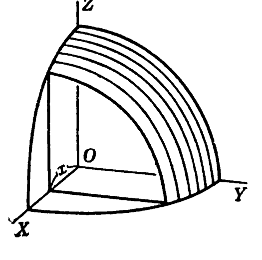
$$\sqrt{U} = \frac{\sin^2 \Pi(x) \sin \Pi(y) \cos \Pi(r)}{\sin \Pi(r) \sqrt{\sin^2 \Pi(x) \sin^2 \Pi(y) - \sin^2 \Pi(r)}}.$$

Подставляя это выражение в формулу (1), получаем:

$$\frac{d^2S}{d\,\Pi(x)\,d\,\Pi(y)} = \frac{\cos \Pi(r)}{\sin^2 \Pi(r)} \frac{\sin^2 \Pi(x) \sin \Pi(y)}{\sqrt{\sin^2 \Pi(x) \sin^2 \Pi(y) - \sin^2 \Pi(r)}}.$$

1) Так как $\sin \Pi(x) \sin \Pi(y) = \sin \Pi(ON)$; $\sin \Pi(ON) \sin \Pi(z) = \sin \Pi(r)$.

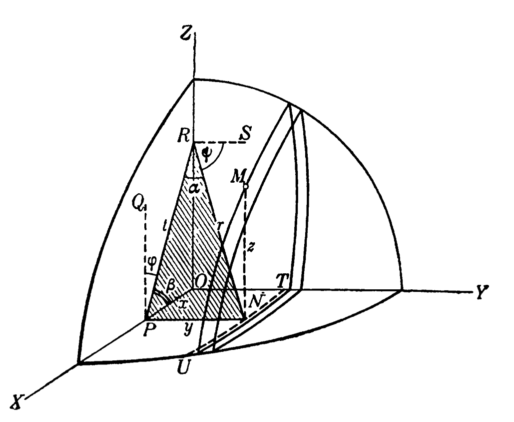
[347] То есть от $y=0$ $\left[\Pi(y)=\frac{\pi}{2}\right]$ до наибольшего значения y, соответствующего данному значению x и потому определяемого этим соотношением. Так как, однако, $\Pi(y)$ убывает с возрастанием y, то пределы интегрирования взяты в обратном порядке. Результат интегрирования нужно умножить еще на 4, потому что вдоль оси x расположены четыре октанта сферы (черт. 60), а интегрирование распространяется только на один.



Черт. 60.

[348] В статье 24 Лобачевский снова вычисляет поверхность сферы, используя вместо декартовых координат x и y угловые координаты ψ и φ. Весь текст Лобачевского написан очень сжато, вычисления только намечены. Они были выполнены А. П. Котельниковым в комментариях к сочинению «О началах геометрии» [1]). Вместо отрывочных примечаний к каждой промежуточной формуле мы проведем здесь изложение заново с вычислениями А. П. Котельникова [2]).

Для вычисления поверхности одного октанта сферы радиуса r Лобачевский разбивает его на полосы не плоскостями, перпендикулярными к одной из осей координат, а *эквидистантными поверхностями*, имеющими своей базой плоскость XOZ [3]) (черт. 61). Вместо декартовых координат x, y, определяющих точку M на сфере, он вводит угловые координаты ψ и φ — два угла, определяемые следующим образом.



Черт. 61.

Пусть $OP=x$, $PN=y$ — абсцисса и ордината точки M на сфере. Найдем на оси OZ такую точку R, соответствующую точке M, чтобы

1) Н. И. Лобачевский, Полн. собр. соч., т. I, стр. 336—341, примечания [109—117].

2) В обработке В. Ф. Кагана, помещенной в его книге «Основания геометрии», т. I, М.—Л., 1949, стр. 460—463.

3) *Эквидистантной поверхностью* называется геометрическое место точек, равноудаленных от данной плоскости (*базы* поверхности). В евклидовой геометрии это — плоскость, параллельная базе; в геометрии Лобачевского — кривая поверхность, обращенная к базе своей вогнутостью (см. стр. 307).

$NR = r$ (для этого проводим сферу радиуса r с центром N и отмечаем точку R ее встречи с OZ). Отрезок PR обозначим через t и напишем основные тригонометрические соотношения для заштрихованного треугольника NPR и треугольника OPR [формулы (12) и (10; вторая из них)]:

$$\left.\begin{aligned} \sin\alpha &= \operatorname{tg}\Pi(r)\operatorname{ctg}\Pi(y), \\ \cos\Pi(x) &= \cos\Pi(t)\cos\beta, \\ \cos\Pi(t) &= \cos\Pi(r)\cos\alpha. \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Углы α и β выразим через их дополнения до $\frac{\pi}{2}$ — углы $NRS = \psi$ ($RS \perp OZ$) и $RPQ = \varphi$ ($PQ \perp OX$); из второй и третьей формул исключим t. Формулы (1) примут вид

$$\left.\begin{aligned} \cos\psi &= \operatorname{tg}\Pi(r)\operatorname{ctg}\Pi(y), \\ \cos\Pi(x) &= \cos\Pi(r)\sin\varphi\sin\psi. \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

Это — те соотношения, которыми Лобачевский определяет новые переменные ψ и φ в начале статьи 24.

Если точка будет двигаться по сфере, оставаясь на одном и том же расстоянии от плоскости XOZ (т. е. находиться на пересечении сферы с эквидистантной поверхностью), то ее проекция N на плоскость XOY также будет находиться на одном расстоянии от оси OX и опишет *эквидистанту* TNU[1]). В этом случае координата $y = PN$ точки M не будет меняться, заштрихованный треугольник не будет изменять своих размеров, наклоняясь к плоскости XOY, вершина R будет опускаться до тех пор, пока она не дойдет до начала O, а треугольник не упадет на плоскость. Угол α (а следовательно, и ψ) не будет меняться, а угол β — меняться от $\frac{\pi}{2}$ до 0 (а угол φ от 0 до $\frac{\pi}{2}$).

Когда затем y будет меняться от 0 до r, то α будет увеличиваться от 0 до $\frac{\pi}{2}$, а ψ уменьшаться от $\frac{\pi}{2}$ до 0.

Таким образом, когда мы распространяем двойной интеграл на один октант, пределами интегрирования будут для обоих углов ψ и φ числа 0 и $\frac{\pi}{2}$.

Чтобы привести выражение элемента площади d^2S сферы, полученного в примечании [346]:

$$d^2S = \frac{\cos\Pi(r)}{\sin^2\Pi(r)} \frac{\sin^2\Pi(x)\sin^2\Pi(y)}{\sqrt{\sin^2\Pi(x)\sin^2\Pi(y) - \sin^2\Pi(r)}}\, d\Pi(x)\, d\Pi(y),$$

---

1) *Эквидистанта* — геометрическое место точек, находящихся в одной плоскости с данной прямой на постоянном расстоянии от нее. В геометрии Лобачевского это — не прямая, а кривая линия.

24 Зак. 754. Н. И. Лобачевский

к новым координатам ψ и φ, введем сначала, как это делает обычно Лобачевский, сокращенные обозначения: вместо $\Pi(x)$, $\Pi(y)$, $\Pi(z)$ будем писать соответственно X, Y, R [1]):

$$d^2S = \frac{\cos R}{\sin^2 R} \frac{\sin^2 X \sin^2 Y}{\sqrt{\sin^2 X \sin^2 Y - \sin^2 R}} dX\, dY, \tag{3}$$

а затем сделаем замену переменных по формулам (2). Подинтегральный дифференциал $dX\,dY$ нужно заменить на $\pm\Delta\, d\psi\, d\varphi$, где Δ — якобиан

$$\Delta = \frac{\partial X}{\partial\varphi}\frac{\partial Y}{\partial\psi} - \frac{\partial X}{\partial\psi}\frac{\partial Y}{\partial\varphi},$$

взятый с надлежащим знаком. А так как в данном случае Y не зависит от ψ, то Δ сводится только к $\frac{\partial X}{\partial\varphi}\frac{\partial Y}{\partial\psi}$. Дифференцируя уравнения (2) соответственно по ψ и φ, находим:

$$\sin\psi = \frac{\operatorname{tg} R}{\sin^2 Y}\frac{\partial Y}{\partial\psi}, \quad -\sin X \frac{\partial X}{\partial\varphi} = \cos R \cos\varphi \sin\psi.$$

Следовательно,

$$\Delta = -\frac{\cos^2 R \cos\varphi \sin^2\psi \sin^2 Y}{\sin R \sin X}.$$

При интегрировании этот якобиан нужно взять со знаком «минус», потому что, как было выяснено выше, когда переменные x и y увеличиваются (X и Y уменьшаются), то φ увеличивается, а ψ уменьшается.

После подстановки элемент площади (3) принимает вид

$$d^2S = -\frac{\cos^3 R \sin X \sin^3 Y \cos\varphi \sin^2\psi}{\sin^3 R \sqrt{\sin^2 X \sin^2 Y - \sin^2 R}} d\psi\, d\varphi, \tag{4}$$

который нужно выразить окончательно через ψ и φ, т. е. выразить $\sin X$ и $\sin Y$ через ψ и φ. В силу уравнений (2)

$$\sin^2 Y = \frac{1}{1+\operatorname{ctg}^2 Y} = \frac{\operatorname{tg}^2 R}{\operatorname{tg}^2 R + \cos^2\psi} = \frac{\sin^2 R}{\sin^2 R + \cos^2\psi \cos^2 R} = $$

$$= \frac{\sin^2 R}{1 - \sin^2\psi \cos^2 R}, \tag{5}$$

откуда

$$\frac{\sin^2 X \sin^2 Y}{\sin^2 R} = \frac{\sin^2 X}{1-\sin^2\psi\cos^2 R};$$

составляя производную пропорцию и учитывая (2), получим:

$$\frac{\sin^2 X \sin^2 Y - \sin^2 R}{\sin^2 X \sin^2 Y} = \frac{\sin^2\psi \cos^2 R - \cos^2 X}{\sin^2 X} = \frac{\cos^2 R \sin^2\psi \cos^2\varphi}{\sin^2 X}$$

и потому

$$\sqrt{\sin^2 X \sin^2 Y - \sin^2 R} = \cos R \sin\psi \cos\varphi \sin Y. \tag{6}$$

---

[1]) См., например, начало статьи 26 на стр. 210.

Подставляя в формулу (4) выражения (5) и (6), получим окончательно:

$$d^2S = -\frac{\cos^2 R \sin X \sin\psi}{\sin R\,(1-\sin^2\psi\cos^2 R)}\, d\psi\, d\varphi =$$

$$= -\frac{\cos^2 R}{\sin R}\,\frac{\sin\psi\,\sqrt{1-\cos^2 R\sin^2\psi\sin^2\varphi}}{1-\cos^2 R\sin^2\psi}\, d\psi\, d\varphi. \qquad (7)$$

Это — формула [29а] Лобачевского.

Интегрируя в пределах от 0 до $\frac{\pi}{2}$ для каждой переменной, получаем поверхность одного октанта сферы, а вся сфера равна восьми таким интегралам.

В статье 23 поверхность сферы была найдена другим способом; она оказалась равной $4\pi\,\mathrm{ctg}^2 R$. Приравниваем эти значения:

$$-8\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{0}\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^2 R}{\sin R}\,\frac{\sin\psi\,\sqrt{1-\cos^2 R\sin^2\psi\sin^2\varphi}}{1-\cos^2 R\sin^2\psi}\, d\psi\, d\varphi = 4\pi\,\mathrm{ctg}^2 R, \qquad (8)$$

откуда Лобачевский получает формулу (30):

$$\int^{\frac{\pi}{2}} d\psi \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi\, \frac{\sin\psi\,\sqrt{1-\cos^2 R\sin^2\psi\sin^2\varphi}}{1-\cos^2 R\sin^2\psi} = \frac{\pi}{2\sin R}.$$

Эта формула дает значение довольно сложного двойного интеграла. Его можно свести к одной квадратуре. Лобачевский употребляет для этого оригинальный прием. Он теперь рассматривает R как переменную, заменяет в обеих частях равенства R через $\frac{\pi}{2}-R$, умножает их на $\cos R\,dR$; интегрированием по R от 0 до R он получает:

$$\frac{\pi R}{2} = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} d\psi \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_0^{R} dR\, \frac{\cos R\sin\psi\,\sqrt{1-\cos^2 R\sin^2\psi\sin^2\varphi}}{1-\sin^2 R\sin^2\psi}. \qquad (9)$$

Если положим $\sin R\sin\psi = u$, то интегрирование по u приводит к разысканию интеграла

$$\frac{\pi R^2}{2} = \int\limits_0^{R}\frac{\sqrt{1-u^2\sin^2\varphi}}{1-u^2}\, du,$$

который выражается в элементарных функциях [1]). По выполнении интегрирования получаем:

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\psi\, d\varphi\sin R\sin\psi}{\sqrt{1-\sin^2 R\sin^2\psi\sin^2\varphi}}.$$

[1]) Для упрощения вычислений Лобачевский очень удачно пользуется возникающей здесь эллиптической функцией. А. П. Котельников дает непосредственный вывод этого интеграла.

Но и это интегрирование по ψ явно выполняется. После несложных преобразований равенство (9) приводится к виду

$$\pi R = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sin\varphi} \ln \frac{1+\sin R \sin\varphi}{1-\sin R \sin\varphi}.$$

Полагая же теперь $\varphi = \Pi(x)$, находим [1]):

$$\pi R = \int_0^{\infty} dx \ln \frac{e^{2x}+1+2e^x \sin R}{e^{2x}+1-2e^x \sin R}.$$

Правую часть интегрируем по частям. Проинтегрированная часть

$$x \ln \frac{e^{2x}+1+2e^x \sin R}{e^{2x}+1-2e^x \sin R}$$

обращается в нуль как при $x=0$, так и при $x=\infty$. Получаем поэтому формулу (31) Лобачевского:

$$\frac{\pi R}{4 \sin R} = \int_0^{\infty} \frac{(e^{2x}-1)\, e^x\, x\, dx}{e^{4x}+e^{2x}\cos 2R+1}. \tag{10}$$

Это — тот интеграл, который Остроградский считал неверным [2]).

[349] Здесь $a = \cos R$.

[350] В сочинении «О началах геометрии» [3]) это предложение формулировано более точно: «справедливость интеграла можно еще доказать и в том случае, когда $\cos 2R$ будет число более единицы».

[351] Найденный интеграл разделяется на две части [4]): «одну от $x=0$ до $x=\infty$, другую от $x=-\infty$ до $x=0$. Последняя может быть представлена иначе:

$$-\int_0^{\infty} \frac{x\, dx}{e^{-x-a}+e^{x+a}}.$$

Обе вместе дадут

$$\int_0^{\infty} \frac{(e^x-e^{-x})\, x\, dx}{e^{2x}+(e^{2a}+e^{-2a})+e^{-2x}} = \frac{\pi a}{2(e^a-e^{-a})} \text{ ».}$$

---

1) $\sin \Pi(x) = \dfrac{2}{e^x+e^{-x}}$.

2) См. стр. 397 этой книги.

3) Н. И. Лобачевский, Полн. собр. соч., т. I, стр. 231.

4) Далее следует текст Лобачевского (см. там же).

XIII. Вычисление объемов тел

Последняя глава «Пангеометрии» (перед заключением) посвящена вычислению объемов. Она состоит из трех статей (25—27). Этот материал имеется и в сочинении «О началах геометрии» [1]).

В статье 25 дается элемент объема в простейшей форме. Эта форма получается, если взять не декартовы координаты x, y, z, а *предельные* ξ, η, ζ, введенные еще в главе X. В этих координатах элемент объема d^3P имеет вид $d\xi\, d\eta\, d\zeta$. Из него можно легко получить элемент объема и в декартовых координатах (формула [31a] и его первые интегралы по dx, dy и dz). Интегрированием Лобачевский получает формулу для объема шара

$$\frac{1}{2}\pi\,(e^{2r}-e^{-2r}-4r)$$

и убеждается, что для малого r она совпадает с известной формулой евклидовой геометрии.

В статье 26 вводятся полярные (сферические) координаты в пространстве: радиус-вектор r, долгота ω и полярная широта θ, определяемые так же, как и в евклидовой геометрии. Геометрическими рассуждениями, не отличающимися от тех, которые проводятся и в евклидовой геометрии, Лобачевский находит элемент объема в этих координатах и интегрированием снова получает ту же формулу для объема шара.

В статье 27 рассматривается объем тела, ограниченного частью предельной сферы и конической поверхностью, составленной из осей этой сферы, проходящих через все точки ее контура. Лобачевский рассуждениями, близкими к тем, которые он применял в статье 4 для предельной линии, устанавливает, что этот объем равен

$$P=\frac{1}{2}S\,(1-e^{-2c}),$$

где S — поверхность части предельной сферы, а c — постоянная, зависящая от единицы измерения длины.

Глава заканчивается утверждением, что «большое число различных выражений для элемента [одной и] той же геометрической величины доставляет средства для сравнения интегралов, средства, которые в особенности полезны в теории определенных интегралов».

В «Пангеометрии» Лобачевский не приводит дальнейших примеров этого утверждения. Но бо́льшая часть сочинений «О началах геометрии», «Воображаемая геометрия» и «Применение воображаемой геометрии к некоторым интегралам» посвящена этому вопросу. Исходя из вычисления объемов тел, Лобачевский нашел много определенных интегралов.

---

[1]) Н. И. Лобачевский, Полн. собр. соч., т. I, стр. 238—239 и 232—233.

[352] Здесь ξ, η, ζ — предельные координаты, которые установлены на стр. 194 и изображены на черт. 40 текста Лобачевского. В евклидовой геометрии — это прямоугольные декартовы координаты. Принимая, что элемент объема выражается так же, как в евклидовой геометрии, Лобачевский полагает его равным $d\xi\, d\eta\, d\zeta$. Эту формулу он не выводит ни в «Пангеометрии», ни в сочинении «О началах геометрии». Ее можно получить следующим образом.

Поверхность $\xi = \text{const}$ представляет собой предельную поверхность. На ней имеет место евклидова геометрия, и потому линии пересечения ее с поверхностями $\eta = \text{const}$ и $\zeta = \text{const}$ образуют на ней ортогональную декартову сеть. Линии же $\eta = \text{const}$, $\zeta = \text{const}$ суть линии, равноотстоящие от оси ξ и лежащие с последней в одной плоскости. Эти линии пересекают поверхность $\xi = \text{const}$ не под прямым углом, и потому система координат ξ, η, ζ, которую вводит здесь Лобачевский, не ортогональна.

Построим элемент объема в этой системе. Одной гранью этого элемента будет прямоугольник со сторонами $d\eta$, $d\zeta$ и вершиной в точке (ξ, η, ζ), лежащей на предельной поверхности $\xi = \text{const}$; противоположной гранью будет такой же точно прямоугольник на поверхности $\xi + d\xi$ с вершиной в точке $(\xi + d\xi, \eta, \zeta)$ и со сторонами $d\eta$ и $d\zeta$. Остальные четыре грани получаем, соединив соответствующие вершины этих прямоугольников линиями, равноотстоящими от оси x. Полученный таким образом элемент будет представлять собой бесконечно малый параллелепипед с прямоугольным основанием и наклонными к основанию ребрами. Площадь основания равна $d\eta\, d\zeta$, высота же равна $d\xi$ — расстоянию между предельными поверхностями ξ и $\xi + d\xi$, и потому объем его будет

$$d\xi\, d\eta\, d\zeta.$$

[353] Как на стр. 195. Дифференцируя это уравнение, получаем:

$$d\zeta = -\frac{d\,\Pi(z)}{\sin^2 \Pi(r)} = \frac{dz}{\sin \Pi(r)}\ .$$

[354] То же уравнение, что и на стр. 195, только q заменено через p.

[355] Из уравнения на стр. 195 имеем:

$$e^{\xi - x} = \sin \Pi(y)\, e^{-p} = \sin \Pi(y) \sin \Pi(z).$$

[356] Последние три формулы получим, если будем интегрировать (31а) сначала по x, затем по y, наконец, по z, в чем нетрудно убедиться их дифференцированием.

[357] Для сферы

$$\sin X \sin Y \sin Z = \sin R\ ^{1)},$$

$$\operatorname{ctg} Y = \sqrt{\frac{\sin^2 X \sin^2 Z}{\sin^2 R} - 1},$$

и, заменяя переменные x, y через X, Y, имеем:

$$dX = -\sin X\, dx, \qquad dZ = -\sin Z\, dz,$$

$$\frac{d^2P}{dX\,dZ} = \frac{\operatorname{ctg} Y}{\sin^3 Z \sin X} = \frac{1}{\sin^2 Z}\sqrt{\frac{1}{\sin^2 R} - \frac{1}{\sin^2 X \sin^2 Z}}.$$

При интегрировании по Z положим:

$$\frac{\operatorname{ctg} Z}{\sin X} = u, \qquad \frac{1}{\sin^2 R} - \frac{1}{\sin^2 X} = a^2.$$

Так как интегрирование по Z совершается в пределах от $\frac{\pi}{2}$ до $\sin Z = \frac{\sin R}{\sin X}$, то пределами для u будут 0 и

$$\frac{1}{\sin X}\sqrt{\frac{\sin^2 X}{\sin^2 R} - 1} = a.$$

Сделав эту подстановку, будем иметь:

$$\frac{dP}{dX} = -\sin X \int\limits_0^a \sqrt{a^2 - u^2}\, du = -\frac{\sin X}{2}\left[u\sqrt{a^2 - u^2} - a^2 \arcsin\frac{u}{a}\right]_0^a =$$

$$= -\frac{\pi}{4} a^2 \sin X = -\frac{\pi}{4}\sin X\left(\frac{1}{\sin^2 R} - \frac{1}{\sin^2 X}\right).$$

При втором интегрировании по X в пределах от $\frac{\pi}{2}$ до R получим:

$$P = \frac{\pi}{4}\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{R}\left(\frac{1}{\sin X} - \frac{\sin X}{\sin^2 R}\right) dX = \frac{\pi}{4}\left(\frac{\cos R}{\sin^2 R} + \ln \operatorname{tg}\frac{1}{2}R\right) =$$

$$= \frac{\pi}{16}\left(e^{2r} - e^{-2r} - 4r\right).$$

Это — объем одного октанта.

[358] Для бесконечно малого r полагаем:

$$e^{2r} = 1 + 2r + \frac{(2r)^2}{2} + \frac{(2r)^3}{6}; \qquad e^{-2r} = 1 - 2r + \frac{(2r)^2}{2} - \frac{(2r)^3}{6}.$$

[359] То есть длина дуги окружности.

[360] Бесконечно малый параллелепипед — элемент объема в сферических координатах.

---

1) $X = \Pi(x)$, $Y = \Pi(y)$, $Z = \Pi(z)$, $R = \Pi(r)$ (см. следующее примечание).

[361] Вывод элемента объема в декартовых координатах сделан Лобачевским геометрическим способом. Аналитическое преобразование элемента объема в предельных координатах $d^3P = d\xi\, d\eta\, d\zeta$ к полученной форме проведено А. П. Котельниковым в примечании [141] к сочинению «О началах геометрии» [1]).

[362] В статье 3 [2]) было установлено, что отношение длин дуг двух предельных линий, заключенных между двумя общими осями, равно e^{-c}, где c — расстояние между предельными линиями. Аналогичная формула следует и для отношения площадей двух фигур на «параллельных» предельных поверхностях, ограниченных общими осями (образующими конической поверхности); в этом случае $\frac{S'}{S} = e^{-2c}$, потому что на предельной поверхности царят законы евклидовой геометрии и площади измеряются квадратом линейной единицы.

XIV. Заключение

Последняя статья 28 сочинения «Пангеометрия» является ее заключением. Она начинается с повторения основного утверждения Лобачевского, высказанного им в прежних работах и в начале главы XI этого сочинения: теперь, когда установлены способы вычисления длин, площадей и объемов, «пангеометрия составляет учение геометрически полное».

Лобачевский отмечает, что исходным моментом для построения неевклидовой метрики являются уравнения (19) — четыре соотношения, связывающие стороны и углы произвольного треугольника. Почти теми же словами начиналось и заключение к первому опубликованному сочинению Лобачевского «О началах геометрии» (там эти уравнения имели номер (17) [3]); те же уравнения заключают и «Геометрические исследования по теории параллельных линий» [уравнения (8)] [4]). Эти уравнения — центральные для всех сочинений Лобачевского. С них, утверждает он, можно начинать изложение Пангеометрии, предварительно указав, что они согласуются с основными геометрическими понятиями. Это — не голословное утверждение; свое сочинение «Воображаемая геометрия» он так и начал.

Центральная часть заключения — соображения Лобачевского о том, какова геометрия реального пространства. Двадцать пять лет тому назад в первом опубликованном сочинении по неевклидовой геометрии «О началах геометрии» он заявил, что это может установить только

[1]) Н. И. Лобачевский, Полн. собр. соч., т. I, стр. 354—357.

[2]) Стр. 143 этой книги.

[3]) Н. И. Лобачевский, Полн. собр. соч., т. I, стр. 260.

[4]) Стр. 133 этой книги.

опыт — «измерение на самом деле». Эту уверенность Лобачевский сохранил в течение всей своей жизни. В сочинении «О началах геометрии» он указал, что опыт подтверждает евклидову структуру пространства для размеров, сравнимых с расстояниями от Земли до звезд, и сделал предположение, что, выходя из пределов нашей Галактики, она может быть, «приметно» отличается от «употребительной Геометрии». В последних строках «Пангеометрии» он пытается указать новый путь для решения этого вопроса. Об этом подробно сказано в двух последних примечаниях к «Заключению».

[363] Рассматривается равносторонний треугольник ABC, в котором сторона BC равна радиусу окружности. В равностороннем треугольнике ABC гиперболической плоскости каждый из внутренних углов меньше $\frac{\pi}{3}$; поэтому Лобачевский ниже полагает $A = \frac{2\pi}{6+K}$, где $K > 0$.

[364] Это вытекает из последней формулы сложения на стр. 158, если положить $x = y = \frac{r}{2}$.

[365] Далее Лобачевский рассматривает треугольник ABS очень больших размеров (черт. 46 текста Лобачевского); одной из его сторон $AB = 2a$ является диаметр земной орбиты, а противоположной вершиной S — неподвижная звезда, наблюдаемая в те два момента, когда Земля находится в плоскости ABS, перпендикулярной к плоскости эклиптики. Углы α (внешний) и β (внутренний острый) этого треугольника находятся непосредственным наблюдением, — это так называемые *геоцентрические широты* звезды S в моменты, когда Земля занимает положения A и B. Стороной AB и углами α и β треугольник вполне определен.

Острый угол δ треугольника не может быть вычислен, пока мы не знаем, какова геометрия реального пространства. Если это геометрия евклидова, то $\delta = \alpha - \beta$; если же она неевклидова, то $\delta < \alpha - \beta$. Зная δ, можно было бы найти и значение константы, определяющей неевклидову метрику реального пространства. Но непосредственно измерить δ невозможно.

Этот треугольник ABS $\left(\text{для случая, когда } A = \frac{\pi}{2}\right)$ Лобачевский рассматривал еще в 1829 году в сочинении «О началах геометрии». Он указал там на вычислительный прием, которым можно после дополнительных астрономических наблюдений определить если не самый угол δ, то его верхнюю границу, а вместе с тем и верхнюю границу для *дефекта* треугольника ABS [разность $\pi - \Sigma$, где Σ — сумма углов треугольника $(\pi - \alpha) + \beta + \delta$], равного $\beta + \delta - \alpha$. Если бы он нашел

не верхнюю, а нижнюю границу дефекта и установил, что она больше нуля, то этим была бы установлена неевклидова структура реального пространства. Найденная же им верхняя граница устанавливает только, с какой степенью точности наше пространство можно считать евклидовым (для части пространства, сравнимой с рассматриваемым космическим треугольником). Это не столь эффектный, но все же очень важный результат, установленный Лобачевским.

Его расчеты показали, что в треугольнике ABS, где S — Сириус, одна из наиболее близких к нам звезд, — дефект во всяком случае меньше $0'',000372$ [1]). Но при этом Лобачевский пользовался очень неточными, заведомо преуменьшенными значениями углов α и β, взятыми из наблюдений одного астронома-любителя, и, кроме того, в вычисления вкралась ошибка, преувеличившая результат в 1000 раз. Но даже сильно завышенное значение для углового дефекта, полученное Лобачевским в 1829 году, приводит его к правильному выводу: дефект его космического треугольника столь мал, что он находится за пределами точности современных ему астрономических наблюдений. Лобачевский делает вывод:

> «После этого можно воображать, сколь эта разность [т. е. дефект треугольника], на которой основана наша теория параллельных, оправдывает точность всех вычислений обыкновенной Геометрии и дозволяет принятые начала этой последней рассматривать как бы строго доказанными» [2]).

Таково «строгое доказательство теоремы о параллельных», которое входило в название недошедшего до нас сочинения Лобачевского, доложенного им в 1826 году.

Но из этого результата Лобачевский еще не делает вывода, что во всем мировом пространстве царят законы Евклида. Треугольник размерами от земной орбиты до Сириуса очень велик, но он может быть и очень малым по сравнению с межзвездными расстояниями. И сейчас же после приведенных строк Лобачевский говорит:

> «Между тем, нельзя не увлекаться мнением г. Лапласа, что видимые нами звезды и Млечный путь принадлежат к одному

---

[1]) Н. И. Лобачевский, Полн. собр. соч., т. I, стр. 207—209. Сжатый текст Лобачевского комментирован А. П. Котельниковым на стр. 283—287 I тома (примечания [26—33]), Мы рекомендуем ознакомиться со статьей Н. И. Идельсона «Лобачевский — астроном»; второй раздел этой статьи содержит очень четкое и доступное изложение этих рассуждений Лобачевского («Историко-математические исследования», вып. II, М.—Л., 1949, стр. 143—154).

[2]) Там же, стр. 209.

только собранию небесных светил подобно тем, которые усматриваем, как слабо мерцающие пятна в созвездиях Ориона, Андромеды, Козерога и проч. Итак, не говоря о том, что в воображении пространство может быть продолжаемо неограниченно, сама Природа указывает нам такие расстояния, в сравнении с которыми исчезают за малостию даже и расстояния нашей Земли до неподвижных звезд».

В «Пангеометрии» Лобачевский снова возвращается к треугольнику ABS. Но теперь он хочет извлечь из него другие результаты; они пояснены в следующем примечании.

[366] Исследование космического треугольника ABS (см. предыдущее примечание), проведенное Лобачевским в работе 1829 года, установило только верхнюю границу дефекта треугольника и, следовательно, не решило окончательно вопроса о том, какова геометрия реального пространства. Этот вопрос волновал Лобачевского всю жизнь; через 25 лет, ослепший, незадолго до смерти он намечает другой путь его разрешения, исходя из такого же космического треугольника. Ему посвящены последние строки «Пангеометрии».

Лобачевский исходит из предположения, что геометрия реального пространства неевклидова. Он предполагает, что объект наблюдения S настолько удален от нас, что угол δ, под которым видна из S земная орбита, практически равен нулю и объект S практически можно считать бесконечно удаленным. Лобачевский, повидимому, считал возможным, что факт такой удаленности звезды от Земли можно установить и *независимо от наблюдения разности геоцентрических широт α и β* [1]) и в этом его предположении нет ничего невозможного. Современная наука обладает различными средствами, исходя из наблюдения спектров туманностей или собственных движений двойных звезд, установить их удаленность.

Если мы для такой звезды определим углы α и β, то нетрудно установить значение константы неевклидовой метрики и установить точно функцию $\Pi(x)$. Лобачевский указывает для этого следующий путь.

Если мы отложим на продолжении BA за точку A такой отрезок $AC = x$, для которого $\alpha = \Pi(x)$, и из точки C восставим перпендикуляр CD к плоскости эклиптики (черт. 46 текста Лобачевского), то AS будет параллельно CD (в смысле Лобачевского). С другой

---

[1]) Н. И. Идельсон не учитывает этой возможности и вследствие этого отрицает значение рассуждений Лобачевского. См. «Историко-математические исследования», вып. II, 1949, стр. 162, 163.

стороны, если положить угол δ практически равным нулю, то BS параллельно AS и, следовательно, BS параллельно CD.

Теперь из двух уравнений

$$\Pi(x) = \alpha \quad \text{и} \quad \Pi(x + 2a) = \beta$$

можно определить две неизвестные величины: отрезок x и константу k пространства Лобачевского, входящую в функцию $\Pi(x) = 2 \operatorname{arctg} \frac{x}{k}$; зная последнюю, «можно вычислить угол $\Pi(y)$ для всякой линии y».

ПРИЛОЖЕНИЕ



ИСТОРИКО-БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ О СОЧИНЕНИЯХ ЛОБАЧЕВСКОГО ПО ГЕОМЕТРИИ



1. «Записки Темникова»

В 1816—1817 учебном году Николай Иванович Лобачевский, только что утвержденный в звании экстраординарного профессора математических наук, читал студентам Казанского университета курс элементарной геометрии [1]). Сохранились отрывочные записи этих лекций Лобачевского, составленные студентом М. Темниковым [2]); наиболее интересный отрывок из этих записок, относящийся к теории параллельных линий, был опубликован в 1909 и в 1951 годах [3]).

В этом отрывке дается очень своеобразная попытка построить теорию параллельных линий без введения специального постулата; это свидетельствует о глубоком проникновении Лобачевского в основы геометрии: данное им доказательство, конечно, опирается на недоказанное утверждение, равносильное постулату о параллельных линиях, и поэтому является ошибочным, но эта ошибка скрыта очень глубоко. Детальный анализ этой части записок Темникова сделан Б. Л. Лаптевым [4]), который установил, что «доказательства ряда

---

1) По рапортам Лобачевского, хранящимся в Центр. гос. архиве Татарской АССР (в дальнейшем цитируется ЦГАТ), ф. 977, 1816 г., № 658, св. № 20, лл. 225, 265, 310, 352; 1917 г., № 812, св. № 26, лл. 247—251.

2) Хранятся в Геометрическом кабинете Казанского университета, № 1067; будут опубликованы в VI томе Полного собрания сочинений Лобачевского.

3) Впервые — А. В. Васильевым в качестве приложения к отдельному изданию сочинения Лобачевского «Геометрия», Казань, 1909 г., стр. 57—65; затем — Б. Л. Лаптевым в качестве приложения к его статье «Теория параллельных линий в ранних работах Н. И. Лобачевского», «Историко-математические исследования», вып. IV, М.—Л., 1951, стр. 220—229.

4) Б. Л. Лаптев, Теория параллельных прямых в ранних работах Н. И. Лобачевского (Доклад, сделанный 25/II 1951 г. в Казани на научной конференции, посвященной творчеству Н. И. Лобачевского). Опубликовано в «Историко-математических исследованиях», вып. IV, М.—Л., 1951, стр. 201—229 и в сборнике «125 лет неевклидовой геометрии Лобачевского (1826—1951)», М.—Л., 1952, стр. 99—116.

теорем, данные Лобачевским в этих лекциях, показывают, что он был близок уже в те годы к созданию новой геометрической системы».

Отрывок из записок Темникова, о котором идет речь, можно с большой точностью отнести к марту 1817 года: из рапорта Лобачевского [1]) видно, что в этом месяце им пройдена теория параллелей.

2. «Основание геометрии»

К 1819 году Лобачевский написал учебник элементарной геометрии, носивший, вероятно, название «Основание [или основания] геометрии». В «Ведомости о сочинениях, изданных членами имп. Казанского университета до вступления их в Университет и о рукописях, у них находящихся», имеется следующая запись, сделанная весной 1819 года:

> «П. э. [т. е. публичный экстраординарный] профессор чистой математики Лобачевский сочинил основание геометрии и несколько рассуждений о высшей математике, которые еще не изданы» [2]).

Рукопись этого учебника до нас не дошла; от нее сохранился только небольшой отрывок — начало главы «О измерении поверхностей тел» [3]).

Совершенно несомненно, что эта рукопись была составлена Лобачевским в связи с читаемыми им лекциями по геометрии. Лобачевский вел записи своих лекций даже в тех случаях, когда он читал их по определенным печатным руководствам. В отчете ректора Казанского университета Г. И. Солнцева за апрель 1820 года говорится:

> «Лобачевский пишет свои лекции как физики, так и астрономии, отдавая их студентам, чтоб могли с меньшим трудом повторять на дому пройденное» [Выше говорится, что астрономию Лобачевский читал по руководству Деламбра и Лаланда] [4]).

Тем более такие записи были необходимы по геометрии, которую Лобачевский читал «по своим тетрадям», как сказано в отчетах Лобачевского [5]).

---

[1]) ЦГАТ, ф. 997, № 812, св. № 26, л. 249.

[2]) Из дела попечителя Казанского учебного округа, 1819 г., № 2. Опубликовано впервые в книге: Н. П. Загоскин, История Казанского университета, т. II, стр. 647, Казань, 1903. Воспроизведено В. Ф. Каганом в Полн. собр. соч. Лобачевского, т. I, стр. 125 и Л. Б. Модзалевским в книге «Материалы для биографии Н. И. Лобачевского». Собрал и редактировал Л. Б. Модзалевский. Изд. АН СССР, М.—Л., 1948, № 89, стр. 86. [Ниже эта книга цитируется как «Модзалевский»].

[3]) Хранится в Геометрическом кабинете Казанского университета, № 15. Опубликован в качестве приложения к статье И. Н. Бронштейна «К истории „Обозрений преподавания чистой математики“ Н. И. Лобачевского», «Историко-математические исследования», вып. III, М.—Л., 1950, стр. 192—194.

[4]) Модзалевский, № 103, стр. 96.

[5]) См. сноску [1]) на предыдущей странице.

В. Ф. Каган в своей статье «Историко-библиографические сведения о сочинении „Геометрия“»[1]) с полным основанием говорит, что «Основание геометрии» было первоначальным вариантом «Геометрии»—учебника, представленного Лобачевским к напечатанию в 1823 году. На это указывает и сохранившийся отрывок из этой рукописи.

3. «Обозрения преподавания чистой математики»

По требованию попечителя Казанского учебного округа М. Л. Магницкого все профессора университета должны были представлять ему на утверждение планы («конспекты» или «обозрения») преподавания своих предметов. Сохранились два «Обозрения преподавания чистой математики», составленные Лобачевским (в «чистую математику» входила и элементарная геометрия): одно — на 1822—1823, а другое — на 1824—1825 учебный год. Первое из них цитируется в настоящей книге как «Обозрение 1», а второе — как «Обозрение 2». «Обозрения» были опубликованы Л. Б. Модзалевским в 1948 году и войдут в VI том Полного собрания сочинений Лобачевского[2]).

Оба «Обозрения» по содержанию очень близки между собой и написаны по одинаковой схеме: в первом разделе каждого «Обозрения» излагаются общие принципы преподавания математических предметов, во втором — распределение предметов по курсам, с подробным его обоснованием, в третьем — программы преподавания отдельных предметов с объяснениями по каждому предмету.

«Обозрения» — первые работы Лобачевского, в которых ярко проявились его материалистические воззрения, ими дышит каждая строка обеих работ. Мы вынуждены ограничиться двумя небольшими отрывками[3]).

---

1) Н. И. Лобачевский, Полн. собр. соч., т. I, стр. 125.

2) «Обозрение 1» хранится в ЦГАТ, ф. 92, оп. 1, 1822, д. 1546, лл. 88—102; «Обозрение 2» — в ЦГАТ, ф. 997, оп. 323, № 36, лл. 14—21. «Обозрение 1» Лобачевский представил также и на 1825—1826 учебный год без всяких изменений, только исправив цифры годов (ЦГАТ, ф. 977, оп. 323, № 36, лл. 1—10). «Обозрение 1» помещено в книге: Модзалевский, № 244, стр. 201—216 (оно отнесено Модзалевским к 1825—1826 г.), «Обозрение 2» — там же, № 218, стр. 173—185. Об исторической последовательности «Обозрений» см. И. Н. Бронштейн, К истории «Обозрений преподавания чистой математики» Н. И. Лобачевского, «Историко-математические исследования», вып. III, М.—Л., 1950, стр. 171—194.

3) О мировоззрении Лобачевского см. С. А. Яновская, Передовые идеи Н. И. Лобачевского — орудие борьбы против идеализма в математике, М.—Л. 1950, 84 стр.; С. А. Яновская, О мировоззрении Н. И. Лобачевского, «Историко-математические исследования», вып. III, М.—Л., 1950, стр. 30—75; вып. IV, 1951, стр. 173—200; Г. Ф. Рыбкин, Материализм — основная черта мировоззрения Н. И. Лобачевского, «Историко-математические исследования», вып. III, М.—Л., 1950, стр. 9—29; Г. Ф. Рыбкин, О мировоззрении Н. И. Лобачевского, Успехи математических наук, М. — Л., 1951, 5, вып. 3, стр. 18—30 (перепечатано в сборнике «125 лет неевклидовой геометрии Лобачевского», М.—Л., 1952, стр. 43—61).

25 Зак. 754. Н. И. Лобачевский

«То неоспоримо, что мы всеми нашими понятиями о телах одолжены чувствам. Подтверждается истина сего и тем, что там останавливается наше суждение, где перестают руководствовать нас чувства, и что мы отвлекаем от тел и такие понятия, к которым наклоняют нас чувства, хотя существо вещей инаково. Пример тому прямые, кривые линии и поверхности, которых в телах природы нет; между тем воображение владеет сими идеалами, почерпнутыми в самом недостатке чувств. Посему все наши познания, которым из природы почерпнутые понятия послужили основанием, справедливы относительно только к нашим чувствам. Это и составляет однако ж единственную цель математических наук, покуда они остаются математическими, то есть, покуда идет дело о щете и числах. Отсюда надобно вывести то заключение, что в основание математических наук могут быть приняты все понятия, каковы бы они ни были, приобретаемые из природы, и что математика на сих основаниях по справедливости может назваться наукою точною...» [1]).

«Основания физики бывают достаточные ее предположения; в чистой математике они должны быть несомнительные для нас истины, первые наши понятия о природе вещей, которые, будучи раз приобретены, сохраняются навсегда, которые неразлучны с каждым умственным представлением и служат первым основанием всякого суждения о вещах: таковы-то должны быть и основания геометрии. Далее, начальные понятия применяются прямо к природе и тем самым отличаются от составных, которые необходимо требуют существования других, откуда бы они происходили. Поверхности и линии не существуют в природе, а только в воображении: они предполагают, следовательно, свойство тел, познание которых должно родить в нас понятия о поверхностях и линиях. Никто до сих пор не предпринимал труда восходить к сим источникам, и основания геометрии остаются темными; а после этого не мудрено, что в ней и многое не выдержит строгого разбора» [2]).

Проф. Н. Н. Парфентьев, впервые обнаруживший (около 1930 года) «Обозрения» в архивах Казанского университета, говорит о них:

«Эти манускрипты, являющиеся в сущности объяснительными записками к тем программам, по коим Лобачевский вел свои курсы, поражают

---

1) «Обозрение 1», Модзалевский, стр. 203—204.

2) «Обозрение 2», Модзалевский, стр. 177.

читателя своей глубиной: почти каждая строка носит на себе следы величайшей гениальности глубоко-проникновенного ума автора»[1]).

План преподавания геометрии в «Обозрении 1» в точности соответствует построению учебника «Геометрия», представленного к напечатанию в 1823 году; приводим его полностью:

«Содержание начал геометрии такое:

I. Понятие о геометрических величинах. Определение пересечения, прикосновения и слияния. Определение круга и шара.

II. Измерение прямых линий, дуг в отношении к кругу, частей поверхности шара в отношении к целой поверхности. Определение углов.

III. О перпендикулах.

IV. О измерении телесных углов. Уклонение к правильным телам.

V. Случаи одинаковости треугольников.

VI. Измерение треугольников и вообще всякой фигуры.

VII. Измерение призм.

VIII. Измерение трехсторонних пирамид и вообще всякого тела.

IX. Измерение круга, цилиндра, конуса, шара, поверхности прямого цилиндра и конуса. В виде прибавления для примера общего способа подобных измерений»[2]).

План в «Обозрении 2» отличается от него чисто внешне. Различия в обоих планах объясняются не столько изменившимися взглядами Лобачевского на преподавание геометрии, сколько необходимостью учитывать отрицательный отзыв, который был составлен неизвестным нам рецензентом по поручению Магницкого[3]). Лобачевский не был согласен с отзывом и оставил преподавание без изменения, заменив в «Обозрении 2» только другими словами места, против которых возражал рецензент. В 1825—1826 учебном году после падения Магницкого он снова вернулся к «Обозрению 1»[4]).

Но различие «Обозрений» оказалось в их вводной принципиальной части — наиболее интересно это различие выражено во взглядах Лобачевского на теорию параллельных линий[5]).

---

[1]) Н. Н. Парфентьев, Натурфилософия Н. И. Лобачевского. В сборнике «К 125-летию (1804/05—1929/30) Казанского университета им. В. И. Ульянова-Ленина», Казань, 1930, стр. 33—34.

[2]) Л. Б. Модзалевский, стр. 206.

[3]) Отзыв и его разбор помещены в статье И. Н. Бронштейна [см. сноску [2]) на стр. 385].

[4]) См. там же.

[5]) Подробнее об этом см. в статьях И. Н. Бронштейна [см. сноску [2]) на стр. 385] и Б. Л. Лаптева [сноска [4]) на стр. 383].

В «Обозрении 1» Лобачевский стоит на той же точке зрения, что и в учебнике «Геометрия»: все известные до сих пор способы построить геометрию без введения специального постулата оказались несостоятельными, и в преподавании на это следует указать, давая вместо доказательства только наглядное «пояснение» постулируемого предложения [1]).

Но в «Обозрении 2» (1824) Лобачевский совсем ничего не говорит об этой важной для него проблеме, а утверждает, что в еще не выясненном вопросе могут быть скрыты факты первостепенного значения. Вот его слова:

> «К тому ж, кто знает, какие от нас скрыты истины в том, чего мы не понимаем?» [2]).

Через 5 лет, в 1829 году, эти же слова Лобачевский повторит в начале своего знаменитого сочинения «О началах геометрии», где впервые было напечатано его великое открытие:

> «В самом деле, кто не согласится, что никакая Математическая наука не должна бы начинаться с таких темных понятий, с каких, повторяя Евклида, начинаем мы геометрию, и что нигде в Математике нельзя терпеть такого недостатка строгости, какой принуждены были допустить в теории параллельных линий ... К тому и не в праве пренебрегать решением вопроса, покуда оно неизвестно и покуда не знаем, не послужит ли оно еще к чему другому» [3]).

Это сопоставление приводит нас к уверенности, что ко времени написания «Обозрения 2», в 1824 году, Лобачевский уже владел основами воображаемой геометрии и отдавал себе отчет в ее значении.

4. «Геометрия»

Помещенное в этой книге сочинение Лобачевского «Геометрия» было подготовлено им к изданию в 1823 году, т. е. в период между «Обозрением 1» и «Обозрением 2». Оно явилось окончательной обработкой лекций Лобачевского по геометрии, которые Лобачевский начал читать еще в 1817 году. Но это была уже глубокая переработка в соответствии с программой, которую Лобачевский изложил в «Обозрении 1». В 1823 году Лобачевский еще не владел «воображаемой

---

1) См. «Геометрия», стр. 57 этой книги, и примечание [47] на стр. 248.

2) Модзалевский, стр. 177.

3) Н. И. Лобачевский, Полн. собр. соч., т. I, стр. 185—186.

геометрией», но уже вплотную подошел к ней. Об этом подробнее сказано в примечаниях к этому сочинению.

«Геометрия» при жизни Лобачевского не увидела света. Попечитель Казанского учебного округа М. Л. Магницкий посылал ее 31 июля 1823 года на отзыв академику Н. И. Фуссу[1]). Отзыв был резко отрицательный[2]); приводим его полностью.

Милостивый Государь мой Михаил Леонтьевич![3])

Сочинение, присланное мне при почтеннейшем отношении В. П. от 31-го июля, за № 912, под заглавием *Геометрия*, содержит в себе разные геометрические рассуждения и исследования, которые под сим или иным подобным названием, по надлежащем выправлении ошибочного и выпущении бесполезного или уже известного, могли бы быть представлены Вашему превосходительству. Но сочинение сие не есть геометрия или полное и систематическое изложение всей науки, и если сочинитель думает, что оно может служить учебною книгою, то он сим доказывает, что он не имеет точного понятия о потребностях учебной книги, т. е. о полноте геометрических истин, всю систему начального курса науки составляющих, о способе математическом, о необходимости точных и ясных определений всех понятий, о логическом порядке и методическом расположении предметов, о надлежащей постепенности геометрических истин, о неупустительной и, по возможности, чисто геометрической строгости их доказательств и пр. О всех сих необходимых качествах и следу нет в рассмотренной мною Геометрии, в которой, между прочим, и то странно, что сочинитель принимает французский метр за единицу при измерении прямых линий и сотую часть четверти круга, под именем градуса, за единицу при измерении дуг круга. Известно, что сие разделение выдумано было во время французской революции, когда бешенство нации уничтожить все прежде бывшее распространилось даже до календаря и деления круга; но сия новина нигде принята не была, и в самой Франции давно уже оставлена по причине очевидных неудобств.

Впрочем, хотя сочинитель и назвал представленное В. П. сочинение — *Геометриею*, но едва ли он сам думать может, что он написал учебную книгу сей науки. Главная цель его, по моему мнению, была та, чтоб объяснить некоторые предметы геометрического учения, кои, по причине введенного в оные, для сокращения, понятия *бесконечно малого*, казались ему темными. Но при старании избежать употребления сего понятия случилось ему то самое, что и другим при подобном намерении случается. Бесконечно малое явно находится и в его геометрии, но под другим именем и видом,

---

[1]) Отзыв хранится в геометрическом кабинете имени Лобачевского при Казанском университете, № 9, лл. 6—7. Впервые опубликован Н. П. Загоскиным (Н. П. Загоскин, История Казанского университета, т. IV, Казань, 1906, стр. 55—56). См. также: Модзалевский, стр. 155—157.

[2]) Изложение дела об издании «Геометрии» с указанием на соответствующие документы имеется в статье В. Ф. Кагана «Историко-библиографические сведения о сочинении „Геометрия"», Н. И. Лобачевский, Полн. собр. соч., т. II, стр. 124—134, а также в монографии В. Ф. Кагана «Лобачевский», М.—Л., изд. 2-е, 1948, стр. 111—120.

[3]) М. Л. Магницкий.

ибо он из общих формул, посредством способа его найденных, для получения истинных и во всех учебных книгах доказанных выражений, бросает члены лишние потому самому, что они, — как он говорит, — меньше *всякого* числа, т. е. бесконечно малы; а если б не были бесконечно малы, то как же мог бы он выпускать сии члены без непростительной погрешности?

При изъясненных мною недостатках сей Геометрии и при значительном количестве полных и к употреблению, хотя и не все равномерно, но гораздо более годных курсов геометрии на русском языке (из коих я упоминаю только о подлинных: Румовского, Осиповского, Гамалея и Гурьева, и о переведенных: с греческого — Евклидовых начал Суворова и Никитина и Петрушевского, с французского — Безу, Лежандра, Лакроа и пр.), само собой разумеется, что сия Геометрия, как учебная книга, нигде принята быть не может, и что оную к напечатанию на казенной счет я рекомендовать никак не могу.

Честь имею быть с истинным почтением и совершенной преданностию
Вашего превосходительства
покорнейшим слугою

3 августа 1823 г. *Николай Фусс*

Отзыв Фусса совершенно неоснователен. Это отмечено в примечаниях к соответствующим местам текста «Геометрии». Разбор отзыва, сделанный В. Ф. Каганом, помещен в книге: Н. И. Лобачевский, Полн. собр. соч., т. II, стр. 39—42.

Н. П. Загоскин, обнаруживший в 1898 году в архивах дело об издании «Геометрии» и самую ее рукопись, пишет в своей «Истории Казанского университета»:

«В силу этого сурового отзыва Н. И. Лобачевскому было объявлено через директора университета, что «сколько бы он, попечитель, не желал ободрить ученые труды г. г. профессоров Казанского университета», но, к сожалению, по изложенным в мнении г. Фусса недостаткам в сочинении г. Лобачевского, не может приступить к изданию его труда, и «поэтому желал бы я, — добавляет Магницкий, — чтобы г. Лобачевский или исправил помянутое сочинение, или подал на замечания г. Фусса изъяснение». Самолюбивый и «характерный» казанский математик не пожелал сделать ни того, ни другого, даже не взял своего труда обратно, и подлинная рукопись «Геометрии» считалась утраченною до начала 1898 г., когда нам посчастливилось открыть ее среди старых дел архива попечительской канцелярии. Согласно постановлению Совета этот любопытный автограф великого русского геометра передан, вместе с самим делом на хранение в геометрический кабинет Казанского университета» [1]).

Впервые «Геометрия» была издана отдельной книгой под редакцией А. В. Васильева в 1909 году [2]) и перепечатана в «Известиях

---

1) Н. П. Загоскин, История Казанского университета, Казань, т. IV, 1906, стр. 56. Рукопись «Геометрия» вместе с делом об ее издании хранится в Геометрическом кабинете и по настоящее время.

2) Н. И. Лобачевский, Геометрия, Изд. Каз. физ.-мат. о-ва с предисловием А. В. Васильева, Казань, 1909.

Казанского Физ.-мат. общества» в 1911 году[1]). Вошла во II том Полного собрания сочинений Лобачевского с комментариями В. Ф. Кагана[2]), которые в основном воспроизведены в этой книге.

5. «Краткое изложение основ геометрии со строгим доказательством теоремы о параллельных»

К началу 1826 года Лобачевский в своем сочинении «Краткое изложение основ геометрии со строгим доказательством теоремы о параллельных» оформил свои исследования по теории параллельных линий, которые занимали его все годы, начиная с 1817 года, и между 1823 и 1824 годами сложились в новую геометрическую систему. Выше были указаны соображения, по которым создание Лобачевским «воображаемой геометрии» следует отнести примерно к 1824 году.

Это сочинение до нас не дошло. Оно было написано на французском языке, так как предназначалось для помещения в журнал «Ученые записки», которые «предполагалось издавать на сем языке, сделавшимся ныне общим между учеными»[3]). Подлинное название сочинения: Exposition succincte des principes de la géométrie avec une démonstration rigoureuse du théorème des parallèles.

Сохранилось три документа, относящихся к этому сочинению. Первый документ — заявление Лобачевского от 6 февраля 1826 года в физико-математическое отделение Казанского университета с просьбой «дать мнение о сем ученых моих сотоварищей» для представления в «Ученые записки»[4]), второй — протокол заседания этого отделения от 11 февраля 1826 года, на котором было решено «поручить рассмотреть сочинение г. г. профессорам Симонову, Купферу и адъюнкту Брашману и мнение свое сообщить отделению»[5]), и третий — «опись делам физ.-мат. отделения за 1826 г.», где решением от 13 июля 1834 года дело о рассмотрении сочинения Лобачевского

---

[1]) Известия Казанского физ.-мат. общества (2), 17, № 12, 1—83. Предисловие А. В. Васильева.

[2]) Н. И. Лобачевский, Полн. собр. соч., т. II, стр. 43—107. Вводная статья и комментарии В. Ф. Кагана.

[3]) Из заявления Лобачевского от 6/II 1826 года [см. сноску [5]) на этой странице].

[4]) ЦГАТ, ф. 997, оп. 324, № 3, л. 1. Обнаружено в январе 1926 года и впервые воспроизведено в сборнике «Празднование Казанским университетом столетия открытия неевклидовой геометрии Н. И. Лобачевским», Казань; на 7-й странице этого сборника указано, когда этот документ был найден. Снимок его перепечатывался много раз, он помещен в Полном собрании сочинений Лобачевского, т. I, перед стр. 413.

[5]) ЦГАТ, ф. 977, оп. 322, № 21, 1824, л. 25.

сдается в архив «за недоставлением от г. г. Симонова, Купфера и Брашмана мнения о сочинении»[1]).

Но содержание сочинения Лобачевского можно считать установленным: оно полностью вошло в другое его сочинение «О началах геометрии» (1829—1830), составив его первую часть, опубликованную в 1829 году и воспроизведенную на стр. 185—206 I тома Полного собрания сочинений Лобачевского. В «Новых началах» имеются два подстрочных примечания, написанных Лобачевским. Первое из них относится к заглавию и гласит:

> «Извлечено самим Сочинителем из рассуждения, под названием „Exposition succincte des principes de la Géométrie etc.“, читанного им в заседании Отделения Физико-Математических наук, 12 февраля 1826 года»[2]).

Второе примечание Лобачевского помещено перед текстом об экспериментальном определении суммы углов космического треугольника:

> «Уравнения (17) и все, что за ними следует, прибавлено уже Сочинителем после к тому рассуждению, которое было им представлено 1826 года в Отделение Физико-Математических наук»[3]).

По этим указаниям видно, что «Краткое изложение основ геометрии» содержало первое систематическое изложение геометрии Лобачевского. Поэтому принято считать «днем рождения геометрии Лобачевского» 11 февраля 1826 года (23/II по новому стилю) — день заседания Физико-математического отделения, когда Лобачевский сделал сообщение о своем открытии.

Слова «со строгим доказательством теоремы о параллельных», которыми заканчивается название сочинения Лобачевского, вызывали недоумения. Большинство исследователей склоняется к тому, что «теорема о параллельных» состоит в возможности существования обеих геометрий, и что только опыт может произвести выбор между ними. Но следует признать, что в этом случае название сочинения является все же странным.

Естественнее считать, что под «теоремой о параллельных» Лобачевский понимал справедливость V постулата Евклида, который «соглашается со всеми измерениями на самом деле»[4]). Что же касается

---

1) ЦГАТ, ф. 977, оп. 325, № 33, 1827, л. 23. Последние два документа найдены в 1950 году и воспроизведены в «Успехах математических наук», 1951, 5, вып. 3, стр. 165—167.

2) Н. И. Лобачевский, Полн. собр. соч., т. I, стр 185. Приводя дату заседания, Лобачевский ошибся на один день.

3) Там же, стр. 207.

4) Там же, стр. 194.

строгого доказательства, то Лобачевский сам объяснил эти слова в своем сочинении «О началах геометрии».

После доказательства того, что в реальном пространстве (во всяком случае в той его части, которая поддается астрономическим наблюдениям) царят законы евклидовой геометрии [1]), Лобачевский говорит:

> «После этого можно воображать, сколько эта разность [2]), на которой основана наша теория параллельных, оправдывает точность всех вычислений обыкновенной Геометрии, и дозволяет принятые начала этой последней рассматривать *как бы строго доказанными*» [3]).

То же самое повторяет Лобачевский и в своем сочинении «Воображаемая геометрия», говоря о тех же выводах из астрономических наблюдений:

> «Предположение употребительной Геометрии [т. е. справедливость V постулата Евклида] надобно следовательно почитать *как бы строго доказанным*, а вместе быть убеждену и в том, что независимо от опыта, напрасно было бы искать доказательства на такую истину, которая еще не заключается сама собою в нашем понятии о телах» [4]).

Совпадение слов о «строгом доказательстве» и в этих цитатах и в названии сочинения Лобачевского, конечно, не случайно. Трудно установить, использовал ли Лобачевский результаты астрономических наблюдений до февраля 1826 года или только предполагал сделать это (он говорит о них не только во второй части сочинения «О началах геометрии», но и в его начале [5])), но именно их он имел в виду говоря «о строгом доказательстве теоремы о параллельных».

Трудно установить также, почему «Краткое изложение основ геометрии» не было своевременно напечатано и понадобилось еще три года, пока оно увидело свет в качестве первой части сочинения «О началах геометрии». Может быть, сказалось отсутствие необходимых отзывов, которых отделение физико-математических наук так и не дождалось от Симонова, Купфера и Брашмана, а может быть сыграло роль то, что не состоялось издание «Ученых записок», для

---

[1]) Подробнее об этом см. примечание [365] к сочинению «Пангеометрия» на стр. 377—379 этой книги.

[2]) То есть дефект треугольника (разность между π и суммой углов треугольника).

[3]) Н. И. Лобачевский, Полн. собр. соч., т. I, стр. 209 (курсив здесь и далее наш. — *И. Б.*).

[4]) Там же, т. III, стр. 26—27.

[5]) Там же, т. I, стр. 186.

которых работа Лобачевского была предназначена. Но Лобачевский не терял времени и за эти три года развил свою «воображаемую геометрию» настолько, что к ней до настоящего времени почти ничего не осталось добавить.

6. «О началах геометрии»

«О началах геометрии» — первое сочинение Лобачевского по геометрии, напечатанное при его жизни. Оно же явилось первым появившимся в математической литературе сочинением, в котором излагается неевклидова геометрия. В нем Лобачевский кратко изложил все те вопросы, которым были посвящены его дальнейшие геометрические работы.

Сочинение не разбито на главы или параграфы [1]). По содержанию его можно разделить на четыре части; из них только последняя имеет самостоятельное заглавие.

К первой части следует отнести всё то, что явилось извлечением из ненапечатанного сочинения Лобачевского «Краткое изложение основ геометрии» [2]). Это — элементарная геометрия, сначала абсолютная, а затем «воображаемая»; ее содержание позже было развернуто в обстоятельном сочинении «Новые начала геометрии с полной теорией параллельных». Содержание второй половины этой части — элементов воображаемой геометрии — в кратком, но очень доступном изложении полностью помещено в сочинении «Геометрические исследования по теории параллельных линий». В первую часть входят основные геометрические понятия, свойства прямолинейных и сферических треугольников, теория параллельных линий, сведения о предельной линии и предельной поверхности и вывод тригонометрических формул. Изложение конспективное, почти без всяких доказательств и, конечно, в качестве первого ознакомления с новой геометрией было недоступным для современников Лобачевского — недоступно оно и в настоящее время.

Вторая небольшая часть [3]) содержит опытное доказательство того, что в природе имеет место не «воображаемая», а «употребительная», т. е. евклидова геометрия, — во всяком случае в пределах той точности, которые дают современные Лобачевскому астрономические инструменты. Эта часть заканчивается утверждением:

> «Как бы то ни было, новая Геометрия, основание которой уже здесь положено, если и не существует в природе, тем не

---

[1]) Такое разделение на параграфы («статьи») Лобачевский сделал в сочинении «Новые начала геометрии с полной теорией параллельных».

[2]) Н. И. Лобачевский, Полн. собр. соч., т. I, стр. 185—206.

[3]) Н. И. Лобачевский, Полн. собр. соч., т. I, стр. 207—209.

менее может существовать в нашем воображении, и, оставаясь без употребления для измерений на самом деле, открывает новое, обширное поле для взаимных применений Геометрии и Аналитики»[1].

В третьей части[2], самой большой по объему, Лобачевский излагает основы аналитической и дифференциальной геометрии в неевклидовом пространстве и применяет полученные им формулы для вычисления площадей и объемов элементарных геометрических фигур, поверхностей и тел. Вычисление проводится методом интегрирования, который Лобачевский еще в «Геометрии» назвал «единственным ясным и строгим». При этом выявляется основная идея приложений воображаемой геометрии к анализу: она состоит в преобразовании и вычислении определенных интегралов. Лобачевский вычисляет площадь или объем, применяя различные способы интегрирования или различные системы координат или разлагая фигуру на более простые. Сравнивая различные полученные выражения, он получает для интеграла конечное выражение или разложение одного интеграла на сумму других, более простых.

Эти вычисления проведены Лобачевским с исключительным искусством; в более развернутом виде они составили содержание двух следующих сочинений Лобачевского: «Воображаемая геометрия» и «Применение воображаемой геометрии к некоторым интегралам».

Некоторые из этих вычислений приведены в сочинении «Пангеометрия», напечатанном в этой книге.

Последняя часть сочинения[3] носит специальное название «Сравнение интегралов и найденные вновь определенные интегралы». В ней Лобачевский сопоставляет некоторые наиболее интересные формулы, найденные в третьей части.

Сочинение заканчивается небольшим заключением[4]. Лобачевский указывает, что все аналитические приложения «воображаемой геометрии» вытекают из четырех основных формул — тригонометрических соотношений в косоугольном прямолинейном треугольнике. Эти последние получаются прямо из формул сферической тригонометрии (умножением длины стороны на $\sqrt{-1}$); этому факту Лобачевский придает очень большое значение, подчеркивая его и в других своих сочинениях.

В заключительном абзаце сочинения Лобачевский ставит вопрос о законах механики в неевклидовом пространстве.

---

1) Н. И. Лобачевский, Полн. собр. соч., т. I, стр. 209—210.

2) Там же, стр. 210—252.

3) Там же, стр. 252—260.

4) Там же, стр. 260—261.

В августе 1832 года Лобачевский направил через Совет Казанского университета оттиск сочинения «О началах геометрии» в Петербургскую академию наук «в знак своего уважения к сему высокому сословию ученых мужей» [1]. Конференция академии поручила академику М. В. Остроградскому сделать устный доклад об этой работе; Остроградский выполнил поручение и зачитал на заседании конференции 7 ноября 1832 года следующий отзыв [2]:

«Рапорт в Императорскую Академию Наук.

Академия поручила мне рассмотреть одну работу по геометрии г-на Лобачевского, ректора Казанского университета, и дать о ней устный отзыв.

Автор, повидимому, задался целью писать таким образом, чтобы его нельзя было понять. Он достиг этой цели; бо́льшая часть книги осталась столь же неизвестной для меня, как если бы я никогда не видал ее. В ней я понял только следующее:

Можно допустить, что сумма углов в треугольнике меньше, чем два прямых угла. Геометрия, вытекающая из этой гипотезы, труднее и пространнее той, которая известна нам, и может служить большим подспорьем в чистом анализе и особенно в теории определенных интегралов, так как она уже послужила для нахождения значения двух определенных интегралов, которые никому еще не удавалось получить и которые было бы, кроме того, трудно получить другим способом.

О том, что я прочел, я считаю долгом сообщить Академии:

1) Из двух определенных интегралов, которые г-н Лобачевский считает своим открытием, один уже известен. Его можно получить на основании самых элементарных принципов интегрального исчисления. Значение другого интеграла, данного на странице 120, является, поистине, новым. Оно — достояние г-на Казанского ректора. К несчастью, оно неверно.

2) Все, что я понял в Геометрии г-на Лобачевского, ниже посредственного.

3) Все, что я не понял, было, повидимому, плохо изложено и поэтому в нем трудно разобраться.

Из этого я делаю вывод, что книга г-на ректора Лобачевского опорочена ошибкой, что она небрежно изложена и что, следовательно, она не заслуживает внимания Академии».

К рапорту приложена следующая записка, написанная и подписанная Остроградским:

«Вот оба интеграла г-на Лобачевского

$$1)\ \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\,dx}{e^{x-a}+e^{-x+a}} = \frac{\pi a}{2}, \qquad 2)\ \int_{0}^{\infty} \frac{(e^{x}-e^{-x})\,x\,dx}{e^{2x}+e^{-2x}+2\cos 2a} = \frac{\pi a}{4\sin a}.$$

[1]) Из сопроводительного письма Совета университета. Модзалевский, стр. 320, № 344.

[2]) Рапорт и приложенная к нему записка составлены на французском языке. Рапорт сохранился в копии, написанной без подписи неизвестной рукой (Архив Академии наук, ф. 1, оп. 2—1832, § 62). Оба документа как в подлиннике, так и русском переводе опубликованы в книге: Модзалевский, стр. 332—337, № 354. В публикуемом здесь переводе сделаны некоторые редакционные изменения.

Первый точен, но он не нов; его можно получить из следующего интеграла: $\int\limits_0^\infty \frac{dx}{1+x^2}=\frac{\pi}{2}$. Подставляя e^x вместо x, получим $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{e^x+e^{-x}}=\frac{\pi}{2}$; умножая это равенство на вещественную величину a и прибавляя к левой части величину $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\,dx}{e^x+e^{-x}}$, равную нулю, находим $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x+a)\,dx}{e^x+e^{-x}}=\frac{\pi a}{2}$; заменяя x на $x-a$, находим интеграл (1), а именно: $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\,dx}{e^{x-a}+e^{-x+a}}=\frac{\pi a}{2}$.

Второй интеграл г-на Лобачевского неточен. В самом деле, так как величина под знаком интеграла есть периодическая функция от a, следовало бы, чтобы и правая часть равенства (2) была периодической функцией от той же величины, что не имеет места; в частности, принимая $a=0$ и $a=\pi$, получаем два совершенно различные результата:

$$\int\limits_0^\infty \frac{(e^x-e^{-x})\,x\,dx}{e^{2x}+e^{-2x}+2}=\frac{\pi}{4}, \qquad \int\limits_0^\infty \frac{(e^x-e^{-x})\,x\,dx}{e^{2x}+e^{-2x}+2}=\infty.$$

Функция $\int\limits_0^\infty \frac{(e^x-e^{-x})\,x\,dx}{e^{2x}+e^{-2x}+2\cos 2a}$ является разрывной: от $a=0$ до $a=\frac{\pi}{2}$ она имеет значение $\frac{\pi a}{4\sin a}$, от $a=\frac{\pi}{2}$ до $a=\frac{3\pi}{2}$ — значение $\frac{\pi(\pi-a)}{4\sin a}$ и так далее.

Очевидно, достаточно найти интеграл $\int\limits^\infty \frac{(e^x-e^{-x})\,x\,dx}{e^{2x}+e^{-2x}+2\cos 2a}$ от $a=0$ до $a=\pi$; он станет известным для всех других величин, как положительных, так и отрицательных. Следует принять $\int\limits_0^\infty \frac{(e^x-e^{-x})\,x\,dx}{e^{2x}+e^{-2x}+2\cos 2a}$ равным $\frac{\pi a}{4\sin a}$ от $a=0$ до $a=\frac{\pi}{2}$ и $\frac{\pi(\pi-a)}{4\sin a}$ от $a=\frac{\pi}{2}$ до $a=\pi$.

М. Остроградский»

На основании отзыва Остроградского в протоколе конференции появилась следующая запись:

«Г. академик Остроградский, имея поручение от Академии рассмотреть работу Г. Лобачевского „О началах Геометрии“ (см. протокол от 5 сентября, § 432), сделал об этом устное сообщение. Указав на то, что из двух определенных интегралов, на вычисление которых при помощи своего нового метода претендует Г. Лобачевский, один уже известен и легко выводится при помощи начал интегрального исчисления, а другой неверен, Г. Остроградский замечает, кроме того, что работа выполнена с таким малым старанием, что бо̀льшая часть ее непонятна. Поэтому он полагает, что этот труд Г. Лобачевского не заслуживает внимания Академии» [1]).

[1]) Н. И. Лобачевский, Полн. собр. соч., т. I, стр. 410; Модзалевский, стр. 331—332, № 353.

В. Ф. Каган в своей монографии «Лобачевский»[1]) показал, что Остроградский ошибся: никакого «неверного» интеграла в работе Лобачевского нет[2]). Через 10 лет тот же Остроградский дал еще один отрицательный отзыв на другую работу Лобачевского — на этот раз по анализу[3]).

Содержание отзыва Остроградского на сочинение «О началах геометрии» получило отражение в известной анонимной рецензии-пасквиле, напечатанной в 1834 году в реакционном журнале Булгарина и Греча «Сын Отечества»[4]).

Рецензия написана под непосредственным влиянием отзыва Остроградского; это видно из следующих ее строк:

> «... в конце книги г. Лобачевский поместил два определимые интеграла, которые *он открыл мимоходом, идя прямо к своей цели — дать общие правила для измерения всех геометрических величин, и дозволивши себе только некоторые применения.* Открытие весьма замечательное! Ибо один из сих новых интегралов уже давно известен и находится гораздо легчайшим образом; другой совершенно неверен, потому что ведет к той нелепости, которую мы уже заметили выше, т. е. что один и тот же определимый интеграл равен то $\frac{\pi}{4}$, то ∞. Но не таковы ли в самом деле большею частию бывают прославляемые у нас новооткрытия? Не часто ли случается, что

---

1) Изд. АН СССР, изд. 2-е, М. — Л., 1948, стр. 255—260.

2) Остроградский обвиняет Лобачевского в том, что последний считает своим открытием два новых интеграла, из которых один может быть легко получен элементарными средствами, а другой вообще неверен. Но Лобачевский вовсе не настаивал на том, что все найденные им при помощи «воображаемой геометрии» определенные интегралы раньше не были известны. Более того, полученный им на новом пути уже известный интеграл (1) является для него одним из подтверждений непротиворечивости новой геометрии. Интеграл (1) получен Лобачевским мимоходом, при исследовании интеграла (2).

Что же касается «неверного» интеграла (2), то при его выводе Лобачевский предполагает, что входящий в него параметр a заключен между 0 и $\frac{\pi}{2}$, а при этом условии иронические упреки Остроградского сводятся на нет. Этой оговорки Остроградский не нашел в сочинении Лобачевского, так как не прочел его внимательно — он обозначает через (2) формулу (92); но эта формула была получена Лобачевским гораздо раньше — под номером (47), где вместо a стоит обозначение $R = F(r)$. Функция $F(x)$ это — угол параллельности; при положительных значениях x она монотонно изменяется от 0 до $\frac{\pi}{4}$, как указано Лобачевским в самом начале своего сочинения. Таким образом, Остроградский не понял Лобачевского и в этом вопросе.

Вывод интеграла (2) Лобачевский воспроизвел в сочинении «Пангеометрия» (стр. 205—207 и примечание [348] на стр. 368—372 этой книги).

3) О причинах такого отношения Остроградского к Лобачевскому см. в книге: Б. В. Гнеденко, Михаил Васильевич Остроградский, М.— Л., 1952, стр. 160—165.

4) Сын Отечества и северный архив, 41, Критика, стр. 107—116, цензурное разрешение 12 октября 1834 года. Отзыв воспроизведен в книгах: В. Ф. Каган Лобачевский, издание второе, М. — Л., 1948, стр. 245—248, Модзалевский стр. 356—362.

старое, представленное только в каком-нибудь новом странном образе, выдают нам за новое, или и новое, но ложное — за чрезвычайно важное открытие?»

Этот отзыв вызвал протест со стороны попечителя Казанского учебного округа М. Н. Мусина-Пушкина, и министр просвещения Уваров предложил издателю журнала поместить в нем возражения Лобачевского [1]), хотя и добавил, что «не находит в рецензии чего-либо лично оскорбительного для сочинителя». Но распоряжение министра выполнено не было: ответ Лобачевского в журнале не поместили. В следующем своем сочинении по геометрии «Воображаемая геометрия» (1835) Лобачевский сделал следующее подстрочное примечание:

«Статьи о началах Геометрии помещены были в Казанском вестнике за 1829 и 1830 годы. В № 41 Журнала Сын Отечества 1834 года напечатана критика, весьма оскорбительная для меня, и надеюсь, совершенно несправедливая. Рецензент основал свой отзыв на том только, что он моей Теории не понял и почитает ее ошибочной, потому что в примерах встречает один *нелепый* интеграл. Впрочем, такого интеграла не нахожу я в моем сочинении. В Ноябре месяце прошедшего года послал я к издателю ответ, который однако ж, не знаю почему, до сих пор, в продолжении пяти месяцев еще не напечатан» [2]).

В другом примечании к этому сочинению Лобачевский разъясняет место, которого не понял рецензент, и пишет:

«Если что нибудь подобное из моих интегралов вывел и тот, кто написал в № 41 Сына Отечества 1834 года критику на мое сочинение о *началах Геометрии*, то или должен быть он несведущ, или по крайней мере слишком поспешен в своем суждении, не различая тех случаев, когда интегралу принадлежат различные значения, и называя их *нелепыми*» [3]).

Сочинение «О началах геометрии» было напечатано в журнале «Казанский вестник» в 1829—1830 годах [4]). Оно было полностью воспроизведено в 1883 году в «Полном собрании сочинений по геометрии» Лобачевского без всяких комментариев [5]) и в 1946 году в «Пол-

[1]) См. Модзалевский, стр. 362, № 385а и стр. 364, № 386а.

[2]) Н. И. Лобачевский, Полн. собр. соч., т. III, стр. 17.

[3]) Там же, стр. 63.

[4]) Казанский вестник, ч. XXV, кн. II—III, февраль — март 1829 года, стр. 178—187; кн. IV, апрель 1829 года, стр. 228—241; ч. XXVII, кн. XI—XII ноябрь — декабрь 1829 года, стр. 227—243; ч. XXVIII, кн. III—IV, март — апрель 1830 года, стр. 251—283; ч. XXIX, кн. VII—VIII, июль — август 1830 года, стр. 571—636.

[5]) Н. И. Лобачевский, Полн. собр. соч. по геометрии, т. I, Казань, 1883, стр. 1—67.

ном собрании сочинений» с очень обстоятельными примечаниями А. П. Котельникова [1]), сделавшими это трудное сочинение доступным. Первые две части сочинения (по разделению, сделанному выше) были выпущены отдельной книгой в 1898 году [2]) с развернутыми выводами тригонометрических формул, сделанными издавшим книгу А. Н. Желтухиным.

В 1898 году был выпущен перевод первых трех частей сочинения на немецкий язык [3]), сделанный Ф. Энгелем с многочисленными примечаниями, историческими и библиографическими справками.

7. «Воображаемая геометрия»

Замечательное открытие Лобачевского, опубликованное им в 1829—1830 годах, было не понято, встречено насмешками. Этот тяжелый удар не обескуражил Лобачевского. Через пять лет, в 1835 году, он печатает свое следующее сочинение «Воображаемая геометрия», в начале которого говорит:

> «...В тесных пределах повременного сочинения [4]) не мог изложить я моего предмета со всей подробностию. Много предложений, помещенных без доказательства, одни выводы из продолжительных и довольно запутанных вычислений, заставляют меня подозревать, что мое сочинение, казавшись с первого взгляда темным, предупреждало охоту заняться им с некоторым вниманием и даже могло подать повод усумниться в строгости моего суждения и в верности выведенных заключений [5]). Эта причина понудила меня искать другого способа увериться самому в истине мной доказанного и потом осмелиться еще раз представить мои исследования на суд ученых. Теперь, оставляя геометрические построения и выбирая краткий обратный путь, намерен я показать, что главные уравнения, которые нашел я для зависимости сторон и углов треугольника в воображаемой Геометрии, могут быть приняты с пользою в Аналитике и никогда не приведут к заключениям ложным в каком бы то ни было отношении» [6]).

---

[1]) Н. И. Лобачевский, Полн. собр. соч., т. I, стр. 185—261.

[2]) Н. И. Лобачевский, О началах геометрии, СПб, 1908, Примечания А. Н Желтухина.

[3]) F Engel, Nikolaj Iwanowitsch Lobatschefskij, Zwei geometrische Abhandlungen, aus dem Russischen übersetzt mit Anmerkungen und einer Biographie des Verfassers, Leipzig, 1898. Сочинение «О началах геометрии» помещено на стр. 1—66 этого издания.

[4]) Речь идет о сочинении «О началах геометрии», печатавшемся в течение $1^1/_2$ лет в пяти выпусках «Казанского вестника».

[5]) В этом месте Лобачевский делает сноску, напечатанную на стр. 399 этой книги.

[6]) Н. И. Лобачевский, Полн. собр. соч., т. III, стр. 17.

«Обратный путь» Лобачевского заключался в том, что он вместо аксиомы о параллельных линиях принимает без доказательства три независимые соотношения между сторонами и углами прямоугольного треугольника [1]), выводит из них основные соотношения в косоугольном треугольнике [2]) и аналитически доказывает, что они не противоречат основным положениям геометрии кроме одного: сумма углов треугольника становится при сделанных предпосылках меньше двух прямых; в бесконечно малом же треугольнике эти соотношения переходят в формулы евклидовой геометрии.

А. П. Норден в своем обзоре сочинения «Воображаемая геометрия» говорит:

> «Надежды Лобачевского на бо́льшую доступность изложения, принятого в «Воображаемой геометрии», не оправдались. Признание его идей последовало только после того, как были поняты его другие сочинения, в первую очередь «Геометрические исследования», следовавшие первоначальному синтетическому пути. Это и естественно, так как изложение в этих сочинениях хотя и является менее кратким, но оно несомненно не носит формального характера, как в «Воображаемой геометрии».
>
> Нельзя, однако, не отметить, что в «Воображаемой геометрии» Лобачевский близко подошел к тому методу введения новых геометрических систем, который является господствующим в настоящее время и сводится к заданию некоторого соотношения аналитического характера, определяющего геометрию в абстрактном пространстве. Точка зрения Лобачевского вполне совпала бы с современной, если бы он начал не с задания конечных тригонометрических соотношений, из которых он сейчас же получает линейный элемент плоскости, а с задания этого линейного элемента, — из него тригонометрические соотношения могли бы быть получены интегрированием. К такой дифференциально-геометрической постановке вопроса, приведшей впоследствии Римана к созданию его системы, Лобачевский был особенно близок, указав на то, что строение его пространства и пространства Евклида тождественны в бесконечно малом» [3]).

Но указанный «обратный путь» составляет только первую, небольшую часть сочинения «Воображаемая геометрия» [4]). Основное его содержание — применения «воображаемой геометрии» к анализу. Как и в сочинении «О началах геометрии», Лобачевский находит элементы длины, площади и объема и интегрированием определяет площади и объемы различных фигур и тел. Вычисление площадей составляет вторую часть сочинения, а вычисление объемов — третью [5]). Применяя различные системы координат или разбивая

---

[1]) Формулы (1), (4) и (7) на стр. 319—320 этой книги.

[2]) Формулы (8) на стр. 133.

[3]) Н. И. Лобачевский, Полн. собр. соч., т. III, стр. 12.

[4]) Там же, стр. 16—27.

[5]) Там же, вторая часть — стр. 28 — 41, третья — стр. 41—70. Деление на части условное: оно сделано не Лобачевским, а А. П. Норденом и А. И. Хованским, комментировавшими это сочинение.

26 Зак. 754. Н. И. Лобачевский

фигуру (тело) различными способами на составленные части, Лобачевский сопоставляет результаты и находит значения определенных интегралов теми же способами, как и в своем первом сочинении. Но полученные им результаты теперь еще более обширны; известный составитель таблиц определенных интегралов Биеренс де Хаан включил в них 88 интегралов, найденных Лобачевским в сочинении «Воображаемая геометрия» [1]).

Сочинение было напечатано впервые на русском языке в «Ученых записках Казанского университета», за год до этого основанных при руководящем участии самого Лобачевского [2]). Первоначально Лобачевский написал это сочинение (в несколько более сжатом виде) на французском языке и отправил в журнал Крелля (Берлин), но оно было там напечатано только в 1837 году [3]).

Оба текста были воспроизведены в 1883—1886 годах в «Полном собрании сочинений Лобачевского по геометрии» без всяких комментариев [4]). Они включены в III том Полного собрания сочинений Лобачевского с обстоятельными комментариями А. П. Нордена и А. И. Хованского (французский текст дан в русском переводе А. И. Хованского) [5]).

В 1904 году «Воображаемая геометрия» была вместе с сочинением «Применение воображаемой геометрии к некоторым интегралам» переведена на немецкий язык Г. Либманом и издана с его комментариями [6]), очень подробными, но значительно уступающими по тщательности комментариям Энгеля к сочинению «О началах геометрии».

8. «Применение воображаемой геометрии к некоторым интегралам»

Это сочинение, напечатанное в 1836 году, является естественным продолжением сочинения «Воображаемая геометрия». В нем Лобачевский в основном теми же методами, что и в предыдущих двух рабо-

---

[1]) См. Б. Л. Лаптев, Интегралы Лобачевского в таблицах Биеренс де Хаана. Статья помещена в виде приложения в Полн. собр. соч. Лобачевского, т. III, стр. 413—425.

[2]) Ученые записки Казанского университета, Казань, книга I, стр. 3—88, 1835.

[3]) N. I. Lobatschewskij, Géométrie imaginaire, Journ. für die reine und angew. Math. **17**, 4, Berlin, 1827, стр. 295—320.

[4]) Н. И. Лобачевский, Полное собрание сочинений по геометрии, Казань, т. I, 1883, стр. 71—120; т. II, 1886, стр. 581—613.

[5]) Н. И. Лобачевский, Полн. собр. соч., т. III, русский текст — стр. 16—70, перевод французского текста, стр. 139—170.

[6]) N. I. Lobatschefskijs Imaginäre Geometrie und Anwendungen der Imaginären Geometrie auf einige Integrale, aus den russischen übersetzt und mit Anmerkungen herausgegeben von H. Liebmann, Leipzig, 1904, 188 стр.

тах, находит большое число новых определенных интегралов [1]). Вычисления проведены Лобачевским мастерски; впервые комментировавший их Г. Либман пишет:

> «Искусство, с которым Лобачевский выполняет этого рода преобразования, вызывает удивление... Это искусство носит печать гениальности».

Сочинение начинается кратким введением, очень характерным для Лобачевского. В нем Лобачевский говорит о преимуществах геометрического пути «по сравнению с формальными аналитическими вычислениями, о выгоде „синтеза" перед „анализом"»:

> «...Геометрические построения ведут иногда к открытиям прямее, нежели вычисления в аналитике, хотя здесь будут они всегда казаться посторонним предметом, и для преподавания могут быть одобрены как пояснительные только примеры. Употребительная Геометрия послужила первым основанием, и даже теперь не перестает нас руководить в вычислении бесконечно малых. Она во многих случаях указала способ интегрирования, который потом перейдя в аналитику принял уже другой вид во всей обширности. Общая Геометрия, которой дал я название *Воображаемой*, подобным образом представляет нам различные применения к интегралам» [2]).

Основная часть сочинения [3]) посвящена выводам интегралов геометрическими методами. В ряде случаев Лобачевский показывает, что те же результаты можно получить и чисто аналитически, но гораздо более громоздким путем [4]). Кроме значений определенных интегралов Лобачевский получил в этом сочинении и другие важные аналитические результаты: новые формулы приведения некоторых кратных интегралов, новое представление решений волнового уравнения и уравнения Лапласа в виде двукратного интеграла от произвольной функции и другие.

Работа завершается сводкой полученных результатов [5]) — собранием 50 интегралов, найденных в сочинении (в отдельных случаях они подвергаются некоторым преобразованиям).

---

[1]) Биеренс де Хаан поместил в своих известных таблицах определенных интегралов 91 интеграл, полученный Лобачевским в этом сочинении [см. статью Б. Л. Лаптева в сноске [1]) на стр. 402].

[2]) Н. И. Лобачевский, Полн. собр. соч., т. III, стр. 181.

[3]) Там же, стр. 181—278.

[4]) Б. Л. Лаптев, комментировавший это сочинение Лобачевского, замечает, что это сравнение обоих выводов, невыгодное для чисто аналитического, сделано отчасти специально для Остроградского, который в своем отзыве считал сочинение Лобачевского бесполезным, так как один из интегралов Лобачевского может быть без труда найден аналитическим путем (см. стр. 397 этой книги).

[5]) Н. И. Лобачевский, Полн. собр. соч., т. IV, стр. 279—294.

Сочинение было напечатано в «Ученых записках Казанского университета» [1]; оно было включено в оба собрания сочинений Лобачевского: в 1883 году без комментариев [2] и в 1951 году с детальными комментариями и сопроводительными статьями Б. Л. Лаптева [3].

Перевод на немецкий язык с комментариями, сделанный Либманом, был издан в 1904 году вместе с его переводом сочинения «Воображаемая геометрия» [4].

9. «Новые начала геометрии с полной теорией параллельных»

Предыдущие два сочинения стоят в стороне от основного замысла Лобачевского — от задачи, которую он поставил в своих первых работах: построить систему геометрии не на евклидовых «темных понятиях», а на понятиях, «приобретаемых из природы» [5]. В «Обозрении 2» был составлен план этого замысла, отличный от того, который был изложен в учебнике «Геометрия»; в сочинениях «Краткое изложение основ геометрии» и «О началах геометрии» были даны его сжатые конспекты. Но только в 1835—1838 годах этот замысел получил окончательное развитие в фундаментальном сочинении Лобачевского «Новые начала геометрии с полной теорией параллельных».

Сочинение состоит из большого Вступления и 13 глав, разбитых на 203 «статьи» (параграфы).

Приводим краткий обзор замечательного «Вступления», сделанный комментаторами «Новых начал» в Полном собрании сочинений Лобачевского [6].

> «Вступление» дает общую характеристику значения и содержания геометрических исследований Лобачевского. Оно содержит ряд интереснейших высказываний о связи между физикой и геометрией, в которых можно видеть как бы зарождение идей, из которых развилась современная теория относительности.
>
> Указав в начале вступления на свои предшествующие работы, в которых дано решение проблемы, стоявшей перед геометрами со времен Евклида, Лобачевский ставит целью настоящей работы дать подробное, развернутое изложение основных своих результатов. Показав порочность ряда

---

1) Ученые записки Казанского университета, Казань, 1836, кн. 1, стр. 3—166.

2) Н. И. Лобачевский, Полное собрание сочинений по геометрии, Казань, 1883, т. I, стр. 121—218.

3) Н. И. Лобачевский, Полн. собр. соч., т. III, стр. 181—294.

4) См. сноску 6) на стр. 402.

5) Выражения самого Лобачевского (Н. И. Лобачевский, Полн. собр соч., т. I, стр. 185; Модзалевский, стр. 204).

6) Н. И. Лобачевский, Полн. собр. соч., т. II, стр. 142 («Новые начала» комментированы в этом собрании Б. Л. Лаптевым, А. П. Норденом и А. Н. Хованским). «Вступление» помещено на стр. 147—167 II тома; оно будет воспроизведено в сборнике «Об основаниях геометрии» под ред. А. П. Нордена, которое готовится к печати.

попыток доказательства пятого постулата Евклида, Лобачевский отмечает, что принципиально возможна более общая геометрическая система, которую он уже развил в своих предшествующих работах и назвал «Воображаемой Геометрией» в отличие от евклидовой «Употребительной». Евклидова геометрия включается в воображаемую как предельный случай, когда размеры фигур малы по сравнению с некоторым абсолютным отрезком, характерным для рассматриваемого пространства.

Только опыт может решить, какова истинная геометрия реального пространства. Но если данные приближенных измерений еще не решили вопрос окончательно, то, считая в практике измерений допустимой более простую евклидову геометрию, мы вправе ожидать, что столкнемся в природе с такими областями явлений, где более общая геометрия будет уже необходима.

Далее следует программа перестройки начал геометрии, подчиненная требованию большей близости в исходных понятиях к непосредственно воспринимаемым чувствами в природе пространственным отношениям материальных тел.

Особо подчеркивается важность синтетического метода в этих вопросах.

Вступление заканчивается общим очерком процесса измерения, определяющего геометрическую величину.

Высказывания Лобачевского о геометрии и о ее связи с реальным миром, приведенные во «Вступлении», свидетельствуют о том, что он стоял на материалистических позициях и совершенно правильно полагал, что критерием истинности научной теории является практика, то есть что истинность теории проверяется на опыте, как соответствие теории действительно осуществляющимся в природе отношениям материальных тел».

13 глав сочинения, естественно, разделяются на три части. В первой (гл. I—VI) излагается абсолютная геометрия, во второй (гл. VII—XI, кроме главы IX о тригонометрических функциях, носящей аналитический характер) — геометрия Лобачевского, в третьей (гл. XII—XIII) — решение прямолинейных треугольников в евклидовой геометрии и прямоугольных сферических треугольников [1]).

Первые две главы — «Первые понятия в геометрии» и «Определения шара, сферы, круга, плоскости и прямой линии» во многом отличаются от начальных глав учебника «Геометрия», помещенного в этой книге. Они являются наиболее интересными, наиболее характерными для Лобачевского. Первоначальные понятия у Лобачевского носят топологический характер; это — геометрическое тело и прикосновение. Последовательно вводятся понятия о расстоянии, сфере, окружности, затем плоскости и, наконец, прямой линии. Здесь нет возможности даже кратко изложить это своеобразное построение [2]).

---

[1]) Первая часть напечатана на стр. 168—265, вторая — на стр. 266—345, третья — на стр. 346—354 II тома Полного собрания сочинений Лобачевского.

[2]) Подробнее об этом см. во вступительной статье А. П. Нордена (стр. 16—17 этой книги), а также в монографии: В. Ф. Каган, Лобачевский, изд. 2-е, М.—Л., 1948, стр. 290—302.

Следующие же четыре главы представляют собой в основном развитие соответствующих глав «Геометрии».

Вся первая часть говорит о том, что Лобачевский в течение многих лет не только строил свою «воображаемую геометрию», но настойчиво размышлял и над вопросом общего обоснования геометрии. «Но легче было даже построить новую геометрию, чем строго обосновать старую» говорит В. Ф. Каган в своей монографии о Лобачевском.

Вторая часть сочинения соответствует тексту «Геометрических исследований» с некоторыми расширениями (например, доказывается, что две расходящиеся прямые имеют общий перпендикуляр). Элементов аналитической и дифференциальной геометрии неевклидова пространства сочинение не содержит, но элементарная геометрия изложена с бо́льшими подробностями, чем во всех других работах Лобачевского.

Третья часть совершенно не связана с предыдущим материалом. Лобачевский решает треугольники в евклидовой плоскости и сферические треугольники, тщательно устанавливая степень точности логарифмических вычислений. Осталось невыясненным, почему эти главы включены в сочинение. Наиболее вероятно предположение, что сочинение «Новые начала» осталось незавершенным; Лобачевский предполагал написать следующие главы, для которых главы XII и XIII были подготовительными. Он хотел выяснить, какова геометрия реального пространства; для этого было необходимо по возможности точно измерить расстояние между далекими небесными телами и в связи с этим решать с большой точностью космические треугольники, как прямолинейные, так и сферические.

Сочинение «Новые начала геометрии с полной теорией параллельных» печаталось в «Ученых записках Казанского университета» с 1835 по 1838 год [1]). Оно вошло в «Полное собрание сочинений по геометрии» (без комментариев) [2]) и в «Полное собрание сочинений» с комментариями Б. Л. Лаптева, А. П. Нордена и А. Н. Хованского [3]). На русском языке оно вышло (без последних двух глав) отдельной книгой в 1912 году с примечаниями Д. М. Синцова [4]).

---

1) Ученые записки Казанского университета, 1835, кн. III, стр. 3—48; 1836, кн. II, стр. 3—98; кн. III, стр. 3—50; 1837, кн. I, стр. 3—97; 1838, кн. I, стр. 3—124; кн. III, стр. 3—65.

2) Н. И. Лобачевский, Полное собрание сочинений по геометрии, т. I, Казань, 1883, стр. 219—486.

3) Н. И. Лобачевский, Полн. собр. соч., т. II, стр. 147—454.

4) Н. И. Лобачевский, Новые начала геометрии с полной теорией параллельных, Харьков, 1912, «Харьк. матем. библиотека», № 2—3, 234 стр.

Перевод на немецкий язык был (без последних двух глав) сделан в 1898 году Ф. Энгелем [1]). «Вступление» к «Новым началам» вышло в 1897 году на английском языке в переводе Г. Б. Хальстеда [2]). «Вступление» и первые восемь глав — в 1900 году на французском языке в переводе Ф. Малье [3]).

В 1932 году «Новые начала» были изданы на украинском языке в переводе В. Лукаша [4]).

10. «Геометрические исследования по теории параллельных линий» [5])

Это сочинение было выпущено Лобачевским в свет в 1840 году после того, как им были уже опубликованы наиболее крупные геометрические сочинения: «О началах геометрии» (1829), «Воображаемая геометрия» (1835), «Применение воображаемой геометрии к некоторым интегралам» (1836), «Новые начала геометрии с полной теорией параллельных» (1835—1838).

Характерной особенностью первых трех сочинений является крайне сжатое изложение всего текста. Краткое, почти схематическое изложение основ новой геометрии сопровождается многочисленными вычислениями определенных интегралов, одни из которых непосредственно выражают те или иные величины (длины, площади, объемы) в «воображаемой геометрии», а другие приводятся к такого рода величинам.

Между тем эти вычисления предполагают отчетливое знание основ новой геометрии. И если трудно себе представить человека, изучающего интегральное исчисление и геометрические приложения без

---

[1]) В книге: F. Engel, N. I. Lobatschewskij, Zwei geometrische Abhandlungen, Leipzig, 1898,, стр. 276—476.

[2]) The Introduction to Lobachévski's New Elements of Geometry. Translated from the Russian, with a preface by G. B. Halsted. Transactions Texas Acad. **2**, 1897, 1—17. Тогда же этот перевод издан отдельно: Austin, Texas, «Neomonic Series» V, стр. 27.

[3]) Lobatchévsky, Nouveaux principes de la géométrie avec une théorie complète des parallèles. Traduit du russe pour la première fois par F. Mallieux. Mémoires de la Société Royale des Sciences de Lièges (3), **2**, № 5, стр. 101; **3**, № 2, стр. 32 (1900). Этот же перевод вышел в 1901 г. отдельным изданием в Брюсселе (F. Hayer, Bruxelles, 132 стр.).

[4]) Н. И. Лобачевский, Нові основи геометрії з повною теорією паралельних, Харьків—Київ, 1932, 130 стр.

[5]) При составлении этого раздела были в большой степени использованы работы В. Ф. Кагана, в частности, тексты статей В. Ф. Кагана «Историко-библиографические сведения о сочинении „Геометрические исследования“» и «Обзор сочинения „Геометрические исследования“», помещенные в I томе Полного собрания сочинений Лобачевского на стр. 172 и 75.

знакомства с элементами геометрии, то в таком именно положении находились в тридцатых годах прошлого столетия те немногие математики, которые пробовали разобраться в мемуарах Лобачевского. В результате эти мемуары совершенно не были поняты.

Сочинение «Новые начала геометрии» изложено гораздо более обстоятельно, но оно содержало много материала, чуждого новой геометрии; печатание его растянулось на четыре года, и оно не содействовало усвоению «воображаемой геометрии».

Тогда Лобачевский пришел к мысли дать краткое, но доступное изложение основных начал новой, «воображаемой» геометрии. Это именно им и выполнено в сочинении «Геометрические исследования по теории параллельных линий», опубликованном на немецком языке в 1840 году. Название сочинения в подлиннике: «Geometrische Untersuchungen zur Theorie der Parallellinien»; оно было выпущено в свет отдельной брошюрой издательством Г. Финке в Берлине [1]).

«Геометрические исследования» представляют собой небольшой, но очень доходчивый очерк основ «воображаемой геометрии». Краткий обзор его содержания помещен в вводном примечании к сочинению на стр. 263—264 этой книги. Составлен очерк с таким мастерством, что он и по настоящее время может служить первой книгой для ознакомления с геометрией Лобачевского.

В том же 1840 году в немецком библиографическом издании «Gersdorfs Repertorium» [2]) была помещена (за подписью «*140*») следующая рецензия на «Геометрические исследования», которую Гаусс справедливо назвал «весьма нелепой»:

> «По утверждению автора, можно принять, не впадая в противоречие, что через данную точку к данной прямой можно провести две несовпадающие параллельные прямые (см. стр. 10), и между этими двумя параллелями через ту же точку могут проходить прямые, которые не встречают данной прямой, не будучи ей параллельны, хотя и лежат с нею в одной плоскости. На таком основании автор желает построить свою собственную науку, которую он называет „воображаемой геометрией". Основы этой науки изложены в настоящей брошюре; однако этот принцип и вытекающее из него предложение (стр. 21): „чем дальше продолжают параллельные линии в сторону их параллелизма, тем более они приближаются одна к другой", достаточно характеризуют это небольшое сочинение и освобождают референта от необходимости дальнейшей его оценки».

---

[1]) Geometrische Untersuchungen zur Theorie der Parallellinien von Nicolaus Lobatschevsky. Kaiserl. russ. wirkl. Staatsrathe und Prof. der Mathematik bei der Universität Kasan. Berlin, 1840. In der G. Fincke'schen Buchhandlung, 61 стр.

[2]) Repertorium der gesammten deutschen Literatur. Herausgegeben von E. Gersdorf, Leipzig, 1840, 3, 147.

Другой печатный отзыв на «Геометрические исследования» появился только через 9 лет после ее опубликования, в 1849 году [1]. Его автор — профессор физической географии Э. А. Кнорр, товарищ Лобачевского, проработавший вместе с ним в Казанском университете 13 лет. Отзыв включен в вводную часть книги Кнорра по элементарной геометрии [2]. Несмотря на большое уважение к Лобачевскому, которое автор старается подчеркнуть, отзыв по существу отрицательный.

Тем не менее Кнорр оказал Лобачевскому большую услугу, не подозревая о ее значении: в конце 1840 или в начале 1841 года он переслал Гауссу один из первых экземпляров «Геометрических исследований», а еще раньше, при личной встрече, рассказал Гауссу о том, что Лобачевский уже опубликовал ряд работ по теории параллельных линий [3].

Ознакомившись с «Геометрическими исследованиями», Гаусс назвал это сочинение выполненным «мастерски в истинно геометрическом духе» [4]. Он увидел в нем ту новую, неевклидову геометрию, к основам которой пришел еще раньше, но тщательно скрывал это от людей, «боясь крика беотийцев». На первой же странице сочинения Гаусс прочел, что первая работа Лобачевского по неевклидовой геометрии была им опубликована более десяти лет тому назад, что она была развита им в других его больших сочинениях.

Гаусс изучил русский язык специально для того, чтобы ознакомиться со всеми сочинениями Лобачевского по геометрии, прошел через весь «дремучий лес» этих сочинений, «изучив каждое дерево в отдельности», и увидел, что полученные им в свое время основные факты неевклидовой геометрии составляют только очень небольшую, хотя и наиболее существенную часть замечательного открытия русского ученого.

Гаусс очень высоко оценил «Геометрические исследования». Но эта оценка стала известна только после смерти Лобачевского и Гаусса, в 1863 году, когда была опубликована переписка Гаусса с друзьями [5]. «Прозвучала иерихонская труба из могилы Гаусса» [6]. Мнение «ко-

---

1) Отзыв помещен в книге: Л. Б. Модзалевский, стр. 530—532.

2) E. Knorr, Versuch einer Darstelluung der Elemente der Geometrie bis zum 29-sten Sätze des 1-sten Buches der Elemente Euclids, Kiew, 1849, стр. III—IV.

3) См. указания А. Д. Дубяго на стр. 426—427 и 458—459 V тома Полного собрания сочинений Лобачевского. А. Д. Дубяго считает (как и Ф. Энгель), что рукопись сочинения «Геометрические исследования» была передана издательству Финке при посредстве того же Кнорра.

4) Из письма Гаусса к Шумахеру, Л. Б. Модзалевский, стр. 520.

5) Отрывки из писем Гаусса с оценкой работ Лобачевского будут помещены в сборнике классических работ об основаниях геометрии, который готовится к печати.

6) В. Ф. Каган, Лобачевский и его геометрия, М., 1955, стр. 19.

роля математиков» сыграло свою роль с запозданием на несколько десятков лет, ученый мир внимательно ознакомился с «Геометрическими исследованиями», и геометрии Лобачевского была возвращена жизнь.

Кроме Гаусса, при жизни Лобачевского нашелся еще один читатель, который назвал сочинение «Геометрические исследования» выполненным с «творческой гениальностью», а его автора — «математиком первого ранга». Это был Янош Больаи, замечательный венгерский математик, который открыл неевклидову геометрию независимо от Лобачевского и от Гаусса и опубликовал ее в своем сочинении «Аппендикс» [1].

Янош ознакомился с «Геометрическими исследованиями» 17 октября 1848 года. Он был поражен совпадением этого сочинения с его собственным «Аппендиксом», потрясен тем, что приоритет замечательного открытия ему не принадлежит. Янош тщательно изучил «Геометрические исследования» и написал свои подробные замечания [2]. Он начинает их с предположения, что никакого Лобачевского не существует, что это — псевдоним Гаусса, желающего сохранить приоритет открытия неевклидовой геометрии. Замечания написаны в очень придирчивом духе, Янош не прощает Лобачевскому никакой недоговоренности, в частности, он резко обрушивается на Лобачевского за то, что тот не доказал совпадения двух констант, появляющихся в разных местах книги [3]. Но при всем том он признает «Геометрические исследования» гениальной работой, а ее автора — математиком первого ранга.

После 1863 года «Геометрические исследования» издавались много раз на многих языках. Не претендуя на полноту, приведем здесь сведения об известных нам изданиях.

Немецкий текст «Geometrische Untersuchungen» вышел в собрании его геометрических сочинений в 1886 году [4]; фототипическое издание с оригинального текста 1840 года выпущено в 1887 году [5].

---

[1]) Русский перевод этого сочинения, сделанный В. Ф. Каганом, издан отдельной книгой: Янош Больаи, Аппендикс. Приложение, содержащее науку о пространстве абсолютно истинную..., М.—Л., 1950. В этой книге имеется биографический очерк Я. Больаи; он воспроизведен в книге: В. Ф. Каган, Лобачевский и его геометрия, М., 1955, стр. 165—192.

[2]) Они воспроизведены в книге «Аппендикс» (см. предыдущую сноску) на стр. 191—192.

[3]) Этого дефекта не было в сочинении «О началах геометрии», написанном за 11 лет до «Геометрических исследований». Он устранен Лобачевским и в последнем его сочинении «Пангеометрия» (постоянные E и e, см. стр. 172 этой книги).

[4]) Н. И. Лобачевский, Полное собрание сочинений по геометрии, т. II, Казань, 1868, стр. 553—578.

[5]) Berlin, изд. Mayer u. Müller, 1887.

Первый русский перевод «Геометрических исследований» был сделан А. В. Летниковым в 1868 году [1]). Новый перевод В. Ф. Кагана, напечатанный в этой книге, вышел в 1945 году отдельной книгой с вступительными статьями и комментариями переводчика [2]); он же включен в основном с теми же комментариями в Полное собрание сочинений Лобачевского [3]).

На французский язык «Геометрические исследования» переводились два раза: в 1866 (пер. Уэля; он переиздавался в том же 1866 и в 1895 годах) [4]) и в 1900 году [5]); на английском языке в 1891 году вышел перевод Гальстеда (выдержал ряд изданий) [6]). Имеется перевод на сербский язык, сделанный Б. Петроньевичем в 1914 году [7]).

11. «Пангеометрия»

В феврале 1855 года исполнилось 50 лет со дня открытия Казанского университета. По этому поводу Совет университета решил выпустить соответствующий юбилейный сборник. Когда решение об издании этого сборника было вынесено, Лобачевский сам предложил дать для него статью, и предложение его было принято в очень лестных для него выражениях. Лобачевский усердно принялся за составление этой работы. Однако празднование юбилея не состоялось, потому что император Николай I нашел это преждевременным. Сочинение Н. И. Лобачевского под названием «Пангеометрия» было опубликовано в «Ученых записках Казанского университета» за 1855 год [8]). В следующем 1856 году юбилейный сборник все же был выпущен, и «Пангеометрия» была в нем опубликована на французском языке [9]). Это был перевод той же статьи с незначительными изменениями, сделан-

---

[1]) Н. И. Лобачевский, Геометрические изыскания по теории параллельных линий. Пер. А. В. Л[етнико]ва, Математический сборник **3**, Москва, 1868, стр. 78—120.

[2]) Н. И. Лобачевский, Геометрические исследования по теории параллельных линий, М.—Л., 1945, 176 стр.

[3]) Н. И. Лобачевский, Полн. собр. соч., т. I, стр. 79—127.

[4]) Ètudes géométriques sur la théorie des parallèles, Mémoires de la Société de Bordeaux **4**, 1866. Отд. изд.: Paris, Gauthier-Villars, 1866; изд. 2-е, 1895.

[5]) Recherches géométriques sur la théorie des parallèles, Paris, Hermann, 1900.

[6]) Geometrical researches on the theory of parallels, Scientiae Baccalaureus **1**, № 3, февр.: 1891, стр. 124—164. Отд. изд.: Rolla, 1891; изд. 2-е, Texas Univers. Bull., май, 1891; изд. 3-е, Austin, Texas Neomonic Series, IV, 1892, 50 стр.; изд. 4-е, 1892; изд. 5-е, Tokyo, Su. Buts, Kw. K. **5**, 1892; изд. 6-е, Tokyo, 1894; изд. 7-е, Chicago, The Open Court, 1914.

[7]) Белград, 1914.

[8]) Ученые записки Казанского университета, 1855, кн. 1, стр. 1—76.

[9]) В переводе И. А. Больцани.

ными Лобачевским [1]). Но выхода этого сборника из печати Лобачевский уже не дождался.

Когда Лобачевский составлял свое последнее сочинение, он был уже тяжело болен. Он почти лишился зрения, и «Пангеометрию» писали под диктовку Лобачевского его ученики — студент Н. И. Бюрно и адъюнкт И. А. Больцани. Хотя Больцани был в полном смысле слова учеником Лобачевского, случайно заметившего его математические дарования и привлекшего его к научной работе, но он не был в состоянии усвоить идеи своего учителя. Больцани очень плохо отзывался о работе, которую писал под диктовку Лобачевского.

Между тем это сочинение содержит, может быть, наиболее оригинальное изложение «воображаемой геометрии».

Существенно нового материала «Пангеометрия» содержит немного; это — сжатый обзор того, что было изложено в его прежних работах, но обзор, содержащий новую обработку этого материала, выполненную очень удачно, местами совершенно по-новому.

Основное содержание «Пангеометрии» и его характерные черты указаны в вводном примечании к сочинению на стр. 329—332 этой книги.

В октябрьском номере журнала «Отечественные записки» за 1856 год [2]) появилась (без подписи) большая рецензия на юбилейный сборник, в котором помещен французский текст сочинения Лобачевского. Значительная часть этого отзыва посвящена «Пангеометрии». Автор рецензии совершенно не разобрался в сочинении Лобачевского и тем не менее написал отрицательный отзыв. Пренебрежительное отношение к Лобачевскому в Петербурге, начатое отзывом Остроградского и пасквилем в «Сыне Отечества», продолжало преследовать великого геометра и после его смерти.

Русский и французский тексты «Пангеометрии» были напечатаны без комментариев в Полном собрании геометрических сочинений Лобачевского в 1883 и 1886 годах [3]); в Полном собрании сочинений (1950) русский текст был помещен с комментариями В. Ф. Кагана [4]), которые с некоторыми дополнениями включены в эту книгу.

В 1858 году, через два года после смерти Лобачевского, в издаваемом в Берлине журнале «Archiv für wissenschaftliche Kunde von

---

1) «Pangéométrie ou précis de géométrie fondée sur une théorie générale et rigoureuse des parallèles («Пангеометрия или изложение геометрии, основанное на общей и строгой теории параллельных линий»). Сборник ученых статей, написанных профессорами Имп. Казанского университета в память пятидесятилетнего его существования, т. I, Казань, 1856, стр. 277—330.

2) «Отечественные записки», 1856, октябрь, «Новые книги», стр. 52—56. Отзыв воспроизведен в книге: Л. Б. Модзалевский, стр. 578—582.

3) Н. И. Лобачевский, Полное собрание сочинений по геометрии, Казань, т. I, 1883, стр. 489—550; т. II, 1886, стр. 617—680.

4) Н. И. Лобачевский, Полн. собр. соч., т. III, стр. 435—524.

Russland» был опубликован немецкий перевод этого сочинения, сделанный с французского текста 1856 года[1]). Этот журнал был очень мало распространен, и издание, повидимому, осталось незамеченным, — по крайней мере, никаких ссылок на него в дальнейшей литературе не появилось.

В 1867 году «Пангеометрия» была издана на итальянском языке в переводе Батталини[2]); в следующем году этот перевод был переиздан. В 1902 году сочинение было переведено на немецкий язык Г. Либманом с его комментариями[3]), а в 1905 году в Париже вышло автотипическое издание французского текста «Pangéométrie»[4]).

И. Н. Бронштейн.

---

1) Pangeometrie, oder die auf einer allgemeinen und strengen Theorie der Parallelen gegründeten Hauptsätze der Geometrie, Erman, **17**, 397—456.

2) Pangeometria, o sunto di geometria fondata sopra una teoria generale e rigorosa della parallele, Giorn. Mat., Napoli. **5**, 1867, 273—320. Отд. изд.: Napoli, Pellerano, 1868.

3) Pangeometrie, Leipzig, Engelmann, Ostwalds Klassiker, № 130, 1902.

4) Paris, Hermann, 1905.

ОГЛАВЛЕНИЕ

(Числа, напечатанные курсивом, обозначают страницы примечаний, а числа в квадратных скобках — номера примечаний, относящихся к соответствующей главе)

Предисловие 5

А. П. Норден. Геометрические идеи Лобачевского 9

ГЕОМЕТРИЯ (1823)

Вступление . . . . 33 *225* [1–7]

I. Измерение линий . . . . 34 *230* [8–13]

II. Об углах . . . . 36 *235* [14–19]

III. О перпендикулах . . . . 39 *238* [20–31]

IV. Измерение телесных углов. О правильных многоугольниках и телах . . . . 45 *241* [32–41]

V. Об одинаковости треугольников . . . . 52 *245* [42–45]

VI. О измерении прямоугольников . . . . 57 *247* [46–52]

VII. Об измерении треугольников и других фигур . . . . . . 61 *250* [53–57]

VIII. О параллелограммах . . . . 64 *251* [58–61]

IX. Об измерении призм . . . . 68 *252* [62–72]

X. Измерение пирамид и всех тел, ограниченных плоскостями . . . . 76 *254* [73–77]

XI. Измерение окружности круга и площади круга . . . . . . 80 *257* [78–88]

XII. Об измерении объема цилиндра и конуса, поверхностей прямого цилиндра и прямого конуса . . . . 85 *259* [89–90]

XIII. О величине объема и поверхности шара . . . . 89 *260* [91–96]

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ИССЛЕДОВАНИЯ ПО ТЕОРИИ ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ ЛИНИЙ (1840)

Перевод с немецкого В. Ф. Кагана

Вступление . . . . 95 *265* [97–99]

I. Предварительные предложения . . . . 96 *267* [100–108]

II. Параллельные линии . . . . 98 *269* [109–119]

III. Сумма внутренних углов прямолинейного треугольника 102 *273* [120–133]

IV. Исследование угла параллельности . . . . 106 *276* [134–138]

V. Взаимное расположение параллельных линий . . . . . . 108 *279* [139–144]

VI. Измерение трехгранных углов . . . . 111 *280* [145–158]

VII. Предельная линия . . . . 116 *285* [159–173]

VIII. Предельная поверхность . . . . 121 *301* [174–182

IX. Уравнения, связывающие стороны и углы прямоугольного треугольника . . . . 123 *307* [183–197]
X. Разыскание функции П (x) . . . . 127 *315* [198–203]
XI. Уравнения, связывающие стороны и углы всякого треугольника . . . . 130 *318* [204–223]

ПАНГЕОМЕТРИЯ (1855)

I. Вступление . . . . 137 *332* [224–227]
II. Основные предложения . . . . 140 *334* [228–238]
III. Уравнения, связывающие стороны и углы прямоугольного треугольника. Формулы сферической тригонометрии . . . 145 *336* [239–256]
IV. Разыскание функции П (x) . . . . 155 *342* [257–261]
V. Уравнения, связывающие стороны и углы всякого треугольника . . . . 159 *342* [262–266]
VI. Начала аналитической геометрии. Длина окружности и дуги предельного круга . . . . 165 *344* [267–282]
VII. Уравнения, связывающие элементы четырехугольника с тремя прямыми углами, и их применение . . . . 173 *349* [283–285]
VIII. Вычисление длины дуги плоской кривой . . . . 178 *351* [286–292]
IX. Вычисление площадей плоских фигур . . . . 181 *353* [293–317]
X. Предельные координаты . . . . 192 *360* [318–323]
XI. Выражение площади треугольника через его стороны . . 196 *362* [324–339]
XII. Вычисление площади кривой поверхности . . . . 203 *364* [340–351]
XIII. Вычисление объемов тел . . . . 208 *373* [352–362]
XIV. Заключение . . . . 214 *376* [363–366]

Примечания

Геометрия 221
Геометрические исследования по теории параллельных линий 263
Пангеометрия 329

Приложение

И. Н. Бронштейн. Историко-библиографические сведения о сочинениях Лобачевского по геометрии 383

ЛОБАЧЕВСКИЙ Н. И.
Три сочинения по геометрии.

Редактор *А. З. РЫВКИН.*
Техн. редактор *Н. Я. МУРАШОВА.*
Корректор *И. Л. ЕДСКАЯ.*

Сдано в набор 10/X 1955 г. Подписано к печати 20/II 1956 г. Бумага 70×108$^1/_{16}$. Печ. л. 26+4 вклейки. Условн. печ. л. 36,12. Уч.-изд. л. 24,69. Тираж 4000 экз. Т-02406. Цена книги 14 р. 60 к. Заказ № 754.

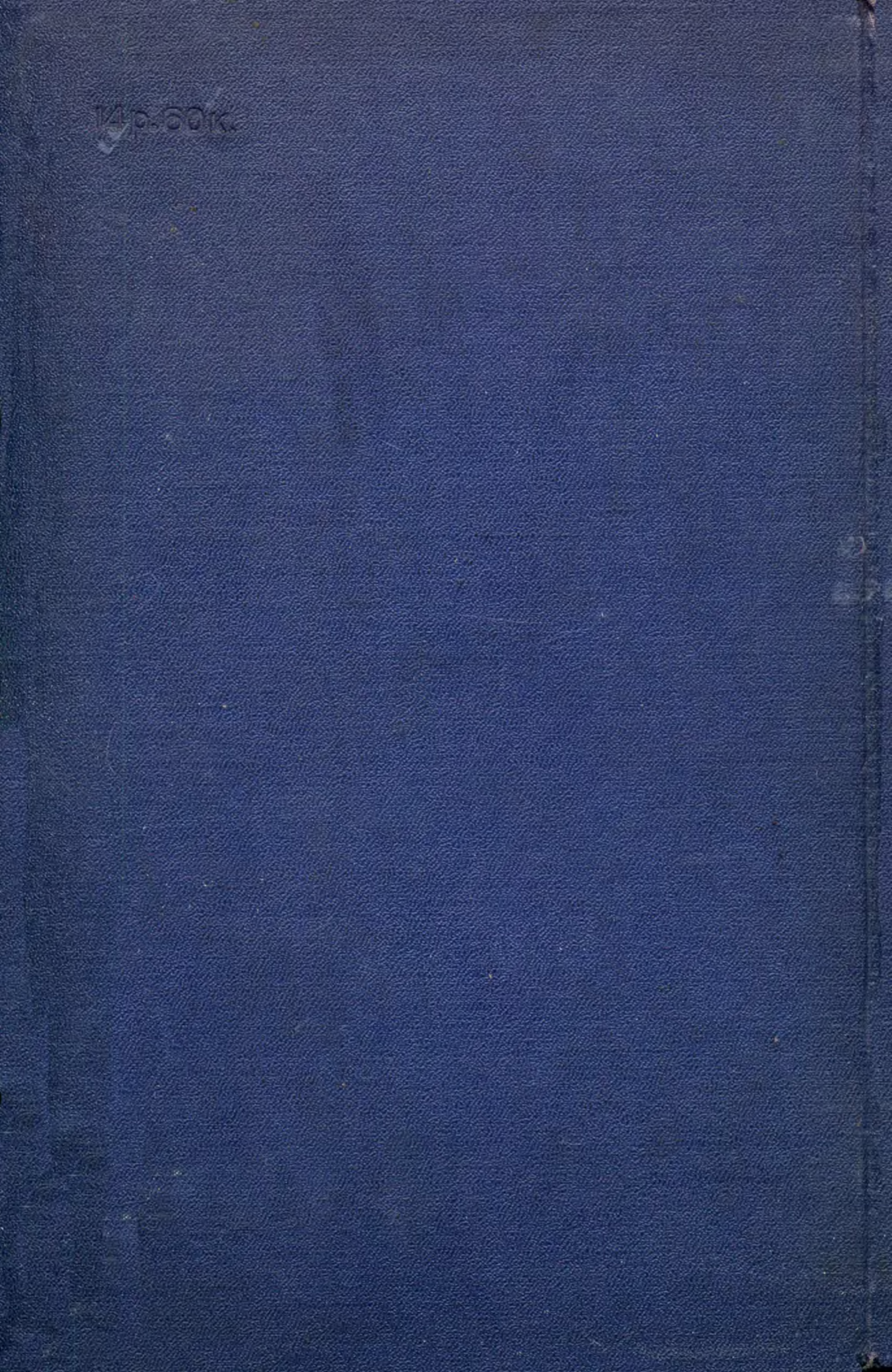
Государственное издательство технико-теоретической литературы.
Москва, В-71, Б. Калужская ул., 15.

Министерство культуры СССР.
Главное управление полиграфической промышленности.
4-я тип. им. Евг. Соколовой.
Ленинград, Измайловский пр., 29.

Н. И. ЛОБАЧЕВСКИЙ

ТРИ СОЧИНЕНИЯ ПО ГЕОМЕТРИИ

Н. И. ЛОБАЧЕВСКИЙ · ТРИ СОЧИНЕНИЯ ПО ГЕОМЕТРИИ


14 р. 60 к.